

**Lehrstücke**

**Mathematik**



**Kantonsschule  
Alpenquai Luzern**

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	3
-------------------	---

<b>Nachinszenierte Lehrstücke im Fach Mathematik</b>	5
--	---

<u>Der würfelnde Chevalier de Méré - Lehrstück «Wahrscheinlichkeitsrechnung»</u>	5
--	---

<u>Das Paradoxon von Xenon - Lehrstück «Achilles und die Schildkröte»</u>	5
---	---

<u>Die Quadratwurzelschnecke - Lehrstück «Pythagoras»</u>	6
---	---

<u>Der Zahlenstrahl vervollständigt sich - Lehrstück «Wurzel 2»</u>	7
---	---

## **Nachinszenierte Lehrstücke im Profulfach**

<u>«Die Erde ist eine Kugel, die im Weltall schwebt» - Lehrstück «Die Himmelsuhr»</u>	7
---	---

<u>Brennt der Docht oder das Wachs? - Lehrstück «Faradays Kerze»</u>	8
--	---

## **Selbstkomponierte Lehrstücke**

<u>Die russigen Grubenlampen - Lehrstück «Kegelschnitte»</u>	9
--	---

<u>Baumhöhen messen - auch für ungeübte Kletterer geeignet - Lehrstück «Strahlensätze»</u>	11
--	----

<u>Vom Ungelösten zum Unvorstellbaren - Lehrstück «Die Geschichte der kubischen Gleichung»</u>	12
--	----

<u>Die Wasseruhr des ägyptischen Königs Amenophis III - Lehrstück «Differentialgleichungen»</u>	13
---	----

<b>Lehrkustdidaktik</b>	15
-------------------------	----

<b>Quellen / Literatur / Impressum</b>	19
--	----

### Geschätzte Leserin, geschätzter Leser



Mathematik zieht mich jeden Tag von Neuem in ihren Bann! Sie ermöglicht, knifflige Rätsel zu lösen – was für eine unbändige Freude, wenn ein Rätsel geknackt ist. Mathematik lässt über Muster staunen, die auch in der Natur zu finden sind. Beim Brüten über geometrischen Figuren lerne ich mich

und mein Denken besser kennen. Alles, was in der Mathematik behauptet wird, darf hinterfragt und nach Herzenslust begründet werden. Dabei treten oftmals überraschende Ergebnisse zutage!

Ohne die Mathematik wäre unser Alltag ein anderer. Doch sie ist nicht einfach vom Himmel gefallen, sondern wurde von neugierigen Menschen während Jahrtausenden zu dem gemacht, was sie heute ist. Es ist faszinierend, diese Menschen kennen zu lernen, ihren Fragen nachzudenken und die Phänomene und Gegenstände, denen sie ihre teilweise bahnbrechenden Erkenntnisse oft mühevoll abgerungen haben, zu verstehen. Lehrstücke rücken diese Menschen, Phänomene und Gegenstände ins Scheinwerferlicht. Die Lernenden werden durch ein Lehrstück in die originalen Fragestellungen hineinversetzt, sie ringen um Antworten und erleben die Lust an der mit Schweiss erarbeiteten Erkenntnisgewinnung. Mathematik bekommt so ein Gesicht, welches freundlich lächelnd den Schüler zum Mitdenken und zur vertieften Auseinandersetzung mit sich und der Welt einlädt.

Im August des Jahres 2006 fand sich eine Gruppe von fast einem Dutzend Lehrpersonen an der Kantonsschule Alpenquai Luzern zusammen, um bereits bestehende Lehrstücke in Mathematik kennenzulernen und im Unterricht auszuprobieren.

Vier davon drehen sich um historisch bedeutungsvolle Rätsel, die derart verblüffend sind, dass die Lernenden nicht eher ruhen, bis sie endlich aufgelöst werden können (Seite 5-7). Diese Lehrstücke sind fester Bestandteil unseres Mathematik-Unterrichts geworden.

Schüler der 2. Klassen an der KSA dürfen sich im Profillfach auf die Lehrstücke „Faradays Kerze“ oder „Die Himmelsuhr“ freuen (Seite 7-8). In ihnen weitet sich der Horizont, die Schüler promenieren stauend durch Gebiete der Chemie, Physik und Öko-

logie, oder ihr Blick schweift zu den Himmelsbildern und den Geschichten, die diese erzählen.

Die vier von uns komponierten Lehrstücke (Seite 8-13) bieten echte Sternstunden vor allem für Schüler des Schwerpunktfachs „Physik und Anwendungen der Mathematik“. Sie führen von einer Wasserruhr im Alten Ägypten, einem Wettstreit im eleganten Venedig oder verrussten französischen Bergwerken bis hin zu unzugänglichen chinesischen Klippen. Wenn das keine genussvolle und geistnährende Weltreise ist...!

Wissenswertes über die Lehrkustdidaktik erfahren Sie im Artikel von Prof. Hans Christoph Berg (Seite 15-18).

Ich bedanke mich bei der Schulleitung der KSA dafür, dass sie uns die Auseinandersetzung mit der Lehrkustdidaktik überhaupt ermöglicht hat. Unser Rektor Hans Hirschi hat bereits in den frühen 1990er Jahren an einem Seminar in Davos die Lehrkustdidaktik kennen und schätzen gelernt und unser Vorhaben mit besonders viel Wohlwollen bedacht.

Mit Hilfe der Mathematik können wir uns und unsere Welt lustvoll erfahren und besser verstehen.

*Philipp Spindler, Kantonsschule Alpenquai Luzern (KSA)*

## Ein erfolgreiches Unterrichtsentwicklungsprojekt



Die vorliegende Broschüre dokumentiert ein fünfjähriges, erfolgreiches Unterrichtsentwicklungsprojekt. Zehn Lehrpersonen aus den Fachschaften Mathematik und Physik liessen sich 2006 durch Prof. Dr. Christoph Berg, Universität Marburg, und Dr. Hans Brüngger, Bern, in die Lehrkunstdidaktik nach Martin Wagenschein ein-

führen. Ihr Ziel war es, Unterrichtsmethoden kennenzulernen und auszuprobieren, welche den Mathematikunterricht für die Schülerinnen und Schüler attraktiver machen und ihre Motivation steigert.

Nachdem erst bestehende Lehrstücke in den eigenen Unterricht integriert wurden, komponierten die Lehrpersonen in einer zweiten Phase eigene Lehrstücke.

Auf den folgenden Seiten werden sowohl die übernommenen als auch die an unserer Schule neu geschaffenen Lehrstücke dokumentiert. Dieses Unterrichtsentwicklungsprojekt ist keine Eintagsfliege. Vielmehr ist es der Gruppe von Lehrpersonen gelungen, das Erarbeitete fest in ihr Unterrichtsrepertoire aufzunehmen. Ihre Aufbauarbeit zahlt sich damit langfristig aus. Dass ein Unterrichtsentwicklungsprojekt nach einer ersten Phase der Begeisterung nicht wie ein Strohfeuer in sich zusammensinkt, ist nicht selbstverständlich. Was sind die Gelingensbedingungen für einen nachhaltigen Erfolg?

Am Anfang steht eine Gruppe von unternehmungslustigen Lehrpersonen. Sie unterrichten alle an der gleichen Schule, was einen regelmässigen Austausch ohne komplizierte Terminabsprachen ermöglicht. Wichtig ist die gemeinsame Weiterbildung, die sie sich ins Haus holen. Sie vermittelt den theoretischen Hintergrund und eine gemeinsame Sprache, um sich über die didaktischen Konzepte und die damit gemachten Erfahrungen auszutauschen. Eine bescheidene, aber verlässliche Entlastung schafft Zeit und Motivation für die Arbeit, die über die übliche Unterrichtsvorbereitung hinausgeht. Zusätzliche zeitliche Ressourcen können durch eine Bündelung der Aktivitäten geschaffen werden. Die Gruppe organisiert sich als Qualitätsgruppe und kann damit die für die Qualitätsarbeit vorgesehene Zeit in das Schulentwicklungsprojekt investieren. Schliesslich werden die eingesetzten Lehrstücke gegenseitig vorgestellt und evaluiert und verbessert.

Das Unterrichtsentwicklungsprojekt „Lehrkunstdidaktik“ ist an der Schule nicht ein erratischer Block, sondern integriert sich ins gegenwärtige Schulentwicklungsprogramm „SIS – Schrittweise zur intellektuellen Selbständigkeit“. Die Lehrstücke eröffnen den Schülerinnen und Schülern den Raum für eigenständige Entdeckungen, geben ihnen die Gelegenheit, eine Vielfalt von „Produkten“ herzustellen, und führen sie weiter zu neuen Fragen.

Das Projekt ist auch ein Beitrag zu den Bemühungen auf kantonaler Ebene, den Mathematikunterricht attraktiver zu gestalten.

Ich gratuliere allen beteiligten Lehrpersonen zu dieser sehr erfolgreichen Unterrichtsentwicklung und hoffe, dass sich weitere Lehrpersonen davon anstecken lassen, Ähnliches zu wagen.

*Dr. Hans Hirschi, Rektor*

### Lehrstück „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ nach einer Vorlage von Hans Brünger [2]

Seit Menschengedenken faszinieren Würfel und Glücksspiele die Menschheit – und auch die Schülerinnen und Schüler. Diese Faszination wird im folgenden Lehrstück fruchtbar gemacht.

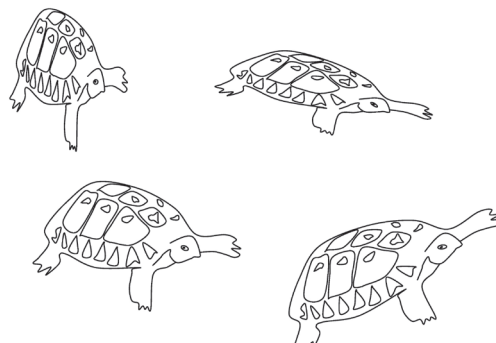
Zu Beginn präsentiert die Lehrperson verschiedene historische Würfelvorgänger, unter anderem auch Tierknochen. Mit diesen sogenannten „Astragali“ wurde früher versucht, die Zukunft vorherzusagen. Im Anschluss daran versetzt sich die Schülerschaft zurück in die Zeit des Sonnenkönigs Louis XIV. In einem Spielsalon tritt die Lehrperson als Chevalier de Méré auf und fordert die Schülerschaft heraus, indem er ein Würfelspiel vorschlägt. Zu barocker Musik nehmen die Schülerinnen und Schüler die Wette an und spielen das Spiel zu zweit gegeneinander. Die Ergebnisse werden zusammengetragen und es wird ersichtlich, dass der Chevalier im Mittel gewinnt. Tatsächlich kann er sich mit diesem Spiel einen guten Lebensunterhalt verdienen!

In der Folge modifiziert der Chevalier de Méré die Spielregeln leicht und wieder erwacht der barocke Spielsalon zum Leben. Die Schülerinnen und Schüler spielen einige Durchgänge des neuen Spiels. Bei der Auswertung fallen die Resultate nun meist leicht zu Ungunsten des Chevaliers aus. Die Lehrperson tritt von seiner Rolle zurück und berichtet, dass der Chevalier zu seinem Entsetzen trotz seiner plausiblen Modifikation des Spiels immer mehr Geld verliert. Wie kann das passieren?

Nun beginnt der Kern des Lehrstücks: In Gruppen versuchen die Schülerinnen und Schüler den Grund zu finden, wieso der Chevalier bei der ersten Spielversion gewinnt und bei der zweiten verliert, und entdecken an diesem Beispiel die Grundprinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

*Lukas Fischer*

### Lehrstück „Achilles und die Schildkröte“ nach einer Vorlage von Hans Brünger [3],[1]



Achilles, der angeblich schnellste Sprinter aller Zeiten, wird bei seinem zweiten Bier in der Bar Tuga in Tortù von einer unscheinbaren Rennschildkröte namens Ruga wegen seines schlechten Stils gehänselt: „Grosser Achill mit deinen 100 m in 8 Sekunden, gib mir nur einen klitzekleinen Vorsprung und du wirst mich auf offener Rennstrecke wegen deines schlechten Stils nie und nimmer einholen, obwohl ich in 8 Sekunden nur gerade bescheidene 20 m hinkriegel!“ Achilles lässt sich in eine Diskussion verwickeln und verspricht der „miesigen Kröte“ beim fünften Bier sogar einen Vorsprung von 100 m. In der Morgendämmerung gibt er sich jedoch ernüchert und zerknirscht geschlagen, noch ehe die beiden zu ihren Startmarken schreiten. Wo liegt der Hase begraben?

Das sich hinter dieser Anekdote verbergende Paradox aus dem alten Griechenland sorgt bis in die heutigen Tage für heisse Köpfe und ist Ausgangspunkt dieses Lehrstücks. Ruga argumentiert so: Nach 8 Sekunden hat Achilles 100 m zurückgelegt, doch sie ist schon bei der 120 m-Marke; erreicht Achilles die 120 m-Marke, ist sie bereits 4 m weiter, sie entwischt ihm also immer wieder und die Aufholjagd wird endlos. Umgekehrt, sofern man dem klaren Verstand vertraut, hat Achilles, wenn er 200 m sprintet, die Schildkröte längst hinter sich.

Die fächerübergreifende Thematik führt in der Mathematik zu den Grundlagen der Infinitesimalrechnung; die Philosophie kommt mit dem Thema des unendlichen Regresses und der gegensätzlichen Positionen von Epikur und Parmenides auf ihre Rechnung; der Physik stellen sich aktuelle Fragen zur Teilbarkeit von Zeit und Raum – und der berndeutsche Liedermacher Mani Matter wird anlässlich einer vergleichbaren visuellen Erfahrung beim Fri-seur vom metaphysischen Gruseln gepackt.

An der Kantonsschule Alpenquai wird das Lehrstück in verkürzter Form bisher hauptsächlich im Immersionsunterricht Mathematik (9. bzw. 11. Schuljahr) eingesetzt.

*Daniel Muzzolini*

## Die Quadratwurzelschnecke

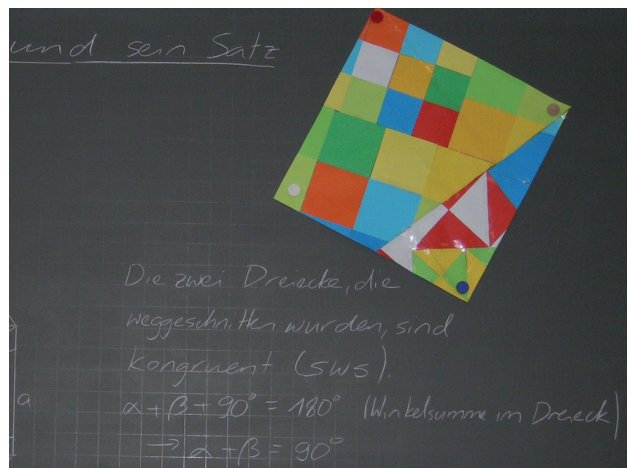
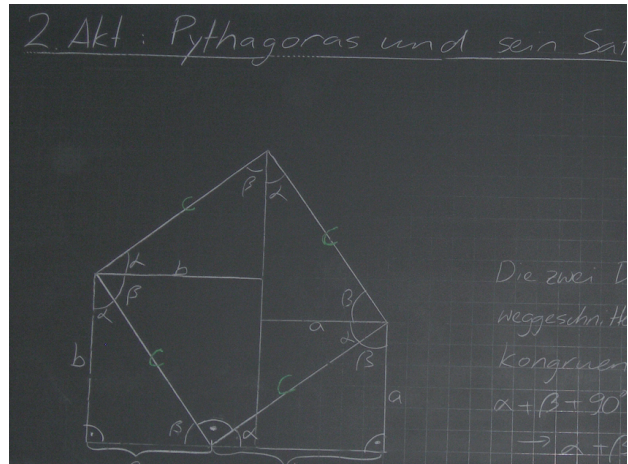
### Lehrstück „Pythagoras“ nach einer Vorlage von Beate E. Nölle und Hans Brünger [5]

Die Schülerinnen und Schüler sitzen im Kreis. Alle erhalten ein Quadrat aus Papier. Der Auftrag ist, diese Papierstücke zu einem einzigen, grossen Quadrat zu vereinen. Es wird diskutiert, geschnitten, geklebt und tatsächlich liegt nach einiger Zeit ein aus den kleinen Quadraten zusammengesetztes grosses Quadrat vor den Lernenden auf dem Boden.

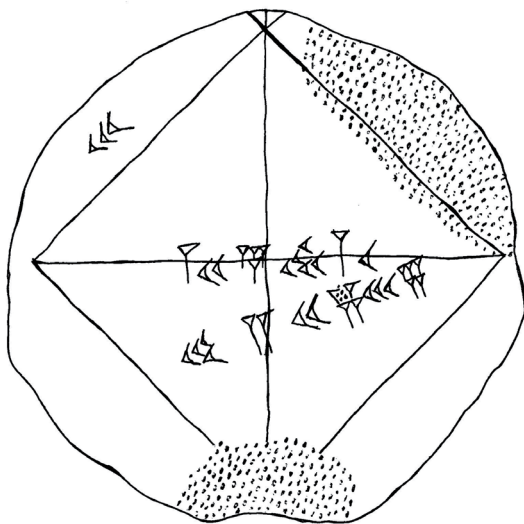
Dass sie mit diesem Resultat den Beweis des Satzes von Pythagoras erbracht haben, wird ihnen erst bewusst, als sie von dem berühmten Satz erfahren. Ein Anhänger von Pythagoras, in Szene gesetzt von einer Lehrperson, erzählt von dessen Lehre, nach welcher der Grundsatz „Alles ist Zahl!“ gelten soll. Kein anderer mathematischer Satz besitzt eine ähnlich grosse Beweisvielfalt. Die Schülerinnen und Schüler lernen einige besonders schöne Beweise zum Pythagoras-Satz kennen. Einer stammt von Leonardo da Vinci, ein anderer sogar von einem amerikanischen Präsidenten!

Die Beweisführung war bereits bei den Griechen ein wichtiger Teil der Mathematik. Die Klasse befasst sich eingehend mit dem originalen Beweis aus dem epochalen Buch „Die Elemente“ von Euklid. Erstaunlich, wie diese mehr als 2200 Jahre alte Argumentation noch heute uneingeschränkte Gültigkeit hat!

Martine Aeschlimann, Sibille Burkard, Anja Handschin,  
Philipp Spindler



Lehrstück „Wurzel 2“  
nach einer Vorlage von Hans Brünger [2]



Eine 4000 Jahre alte babylonische Tontafel gibt Rätsel auf. Deutlich zu erkennen ist ein Quadrat, in welches die beiden Diagonalen eingezeichnet sind. Doch was bedeuten die zahlreichen, seltsam anmutenden Kerben und Eindrücke, die entlang der einen Diagonale und am Rand der Tafel angebracht sind? „Eine Schrift, die ich nicht verstehen kann“, so denkt wohl mancher Schüler beim Anblick der Zeichen. Doch damit täuscht er sich: Die Lernenden sind tatsächlich in der Lage, die Schrift zu entschlüsseln und ihren Inhalt zu enträtseln. Das Ergebnis ist verblüffend: Übersetzt in das heute verwendete Zehnersystem stellen die Kerben die Zahl *Wurzel 2*, die Länge der Diagonale des gezeichneten Quadrates, auf vier Nachkommastellen genau dar!

Dieses Resultat wirft die Frage auf, wie die Menschen die mysteriöse Zahl *Wurzel 2* berechnen konnten. Das Heron-Verfahren, das schon vor dem Beginn der Zeitrechnung von Mathematikern verwendet wurde, liefert eine erste Antwort. Mit erstaunlich wenigen Schritten kann man sich *Wurzel 2* beliebig genau annähern. Die Brüche, die während dieses Vorgangs entstehen, nehmen jedoch immer unübersichtlichere Züge an und stimmen nie genau. Welche Bruchzahl stellt denn nun also *Wurzel 2* exakt dar?

Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass es für *Wurzel 2* keine Bruchzahl gibt. Pythagoras lag also mit einer seiner Behauptungen falsch: Nicht alle Zahlen lassen sich als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellen!

Philipp Spindler

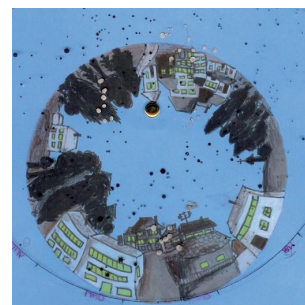
Lehrstück „Die Himmelsuhr“  
nach einer Vorlage von Michael Jänichen [4]

Jedes Kind weiss, dass die Erde eine im Weltall schwebende Kugel ist. Dennoch ist und bleibt die Vorstellung der schwebenden Erdkugel ungeheuerlich. Ist es möglich, dieses Schweben nicht nur zu wissen, sondern sogar zu erleben?

Der 1. Akt, „**Der belebte Himmel**“, spielt an einem sternenklaren Abend an einem Ort mit guter Umsicht. Im schwächer werdenden Abendlicht zeichnen die Schülerinnen und Schüler auf einem stabilen Karton den Horizont (Berge, Bäume und Häuser) im Innern entlang eines vorgezeichneten Kreises ein.

Nach dem Eindunkeln stellt die Lehrperson die Sternbilder vor und erzählt den Schülerinnen und Schülern einige den Sternbildern zugrunde liegende Geschichten und Zusammenhänge aus der griechischen Mythologie. Da wird beispielsweise klar, wieso der Bär im Sternbild des grossen Bären einen so langen Schwanz hat und dass das Sternbild nicht ohne Grund die ganze Nacht sichtbar bleibt. Die Geschichte des äthiopischen Königspaares Kassiopeia und Kepheus und das Schicksal ihrer Tochter Andromeda wird erzählt, und in diesem Zusammenhang wird klar, wieso es in der libyschen Wüste so viele Giftschlangen hat.

Der 2. Akt, „**Die Himmelsuhr**“, findet wieder im Schulhaus statt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten eine Folie mit den in der nördlichen Hemisphäre sichtbaren Sternen. Sie fixieren die Folie mit Hilfe einer Rundkopfklemmer auf dem Karton.



Weiter werden auf dem Karton Uhrzeiten und auf der Folie die Monate entlang dieses Kreises eingezeichnet. Wenn nun die augenblickliche Uhrzeit auf dem Karton mit dem aktuellen Datum auf der Folie zur

Deckung gebracht wird, erscheint der momentan sichtbare Sternenhimmel innerhalb des gezeichneten Horizonts.

Nach einer mehrstündigen Pause findet der letzte Akt statt: „**Die Erde schwebt**“. Die Klasse begibt sich wieder an den Ort mit guter Umsicht. Es wird deutlich, dass sich die betrachteten Sternbilder am Himmel gedreht haben: Die nicht mehr sichtbaren Konstellationen müssen sich unter den Horizont unter uns geschoben haben: Wir schweben!

Lukas Fischer

## Brennt der Docht oder das Wachs?

### Lehrstück „Faradays Kerze“ nach einer Vorlage von Susanne Wildhirt [6]

Eine brennende Kerze verbreitet Licht, Wärme und Gemütlichkeit und erfreut nicht nur die Verliebten in einer lauen Sommernacht, sondern auch die Naturwissenschaftlerinnen und Naturwissenschaftler. Diesem Phänomen der brennenden Kerze nachzugehen und so die Freude noch zu intensivieren, ist das Ziel dieses Lehrstückes.

#### Ouvertüre: Kerze woher – wohin?

Woher kommen Kerzen eigentlich? Diese Frage steht am Anfang des Lehrstücks, zu deren Beantwortung ein Ausflug zu den Bienen gemacht wird. Anhand einer Bienenwabe werden die Wachsherstellung und die Honigproduktion durch die Tiere thematisiert. Unter dem Binokular werden die Bienen genauer angeschaut. Auch zeichnen die Lernenden aus der Erinnerung eine Kerze möglichst genau und vergleichen ihre Zeichnung anschliessend mit einer brennenden Kerze.

Wichtig ist, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, genau zu beobachten und das Beobachtete zu protokollieren: Welche Farben und welche Form hat die Flamme? Wie bewegt sich die Flamme?

Sie erfahren ausserdem mehr über Michael Faraday, sein Leben, seine Entdeckungen in verschiedensten Bereichen der Physik und Chemie und über seine Vorlesungen mit dem Titel „Naturgeschichte einer Kerze“, die er ab 1827 in der Weihnachtszeit für Jugendliche hielt.



#### 1. Akt: Was brennt?

Eine Flamme kann von einem Streichholz auf den Docht einer kurz davor ausgepusteten Kerze springen! Ein überraschendes Phänomen. Einen einfachen Versuch, welchen Faraday vor fast 200 Jahren seinem Publikum zeigte, kann die Klasse dank seiner Anleitung selber durchführen. Das Ergebnis versetzt sie in Staunen, viele Fragen werden aufgeworfen. Der Forschungsdrang ist erwacht. Es stellt sich beispielsweise die Frage, was denn überhaupt brennt: der Docht oder das Wachs?

Der Docht und anschliessend die unterschiedlichen Aggregatzustände des Wachses und deren Vorkommen bei einer brennenden Kerze werden erforscht. Eine weitere Unterrichtssequenz untersucht den Zusammenhang zwischen dem Luftvolumen in einem Gefäss und der Brenndauer einer darin befindlichen Kerze. Dieser Zusammenhang wird graphisch dargestellt.

#### 2. Akt: Was passiert in der Flamme?

Diese Frage steht im zweiten Akt im Zentrum. Leicht können die Lernenden Russringe herstellen und sehen so, wo die Flamme brennt. Sie erkennen auch, dass sich Russ bildet, wenn der Verbrennungsprozess gestört wird. Woher aber kommt dieser Russ? Wenn er sich bereits in der Flamme befindet, müsste er doch sichtbar gemacht werden können – aber wie? Die Ablichtung des Schattens einer Kerzenflamme mit einem Diaprojektor an eine Wand bringt Klarheit: Der Schatten jenes Teils der Flamme, die Russ enthält, wird auf die Wand geworfen.

Mit Hilfe von Stoffen, welche farblose Flammen färben können, kann der Zusammenhang von Russ und Kohlenstoff gezeigt werden. Auch kann am Phänomen der brennenden Kerze der grundlegende Vorgang der Stoffumwandlung gut besprochen werden: Ein Stoff verschwindet nicht einfach, auch das Kerzenwachs nicht. Die Lernenden entdecken, dass andere Stoffe daraus hervorgehen. Aus dem Wachs der Kerze und dem zum Brennen notwendigen Sauerstoff entsteht Kohlenstoffdioxid. Die Schülerinnen und Schüler sind jedoch verblüfft, als weiteren Stoff Wasser zu entdecken.

#### 3. Akt: Wohin – woher?

Für Bienenwachskerzen braucht es das Wachs der Bienen. Damit Bienen Wachs produzieren können, bedürfen sie Nektar und Pollen von Pflanzen. Diese Pflanzen wiederum benötigen Wasser und Kohlenstoffdioxid. Welche Überraschung: Beide entstehen beim Verbrennungsvorgang von Wachsdampf – der Kreis zur Ouvertüre schliesst sich.

*Sibille Burkard, Martine Aeschlimann, Margrit Keller,  
Franco Antognoli*



## Die russigen Grubenlampen

### Lehrstück „Kegelschnitte“

komponiert von Lisa Henrich und Michael Portmann

#### Einleitung

Wir schreiben das Jahr 1825. Vor wenigen Jahren verlor Napoleon seine letzte Schlacht in Waterloo und wurde endgültig auf die Insel St. Helena verbannt. Germain Pierre Dandelin ist Professor für Bergbau in Liège und besucht gerade zu der Zeit ein Steinkohlebergwerk in der Nähe von Liège. Im Bergwerk fällt ihm wieder ein Brief ein, in welchem der junge Mathematiker Querlet ihm von seiner neusten Passion schreibt. Das brennende Öl der Grubenlampen stinkt, die Luft ist russig und verbraucht. Immer noch spuken Ideen aus Querlets Brief in Dandelins Kopf herum. Später erzählt Dandelin Querlet, er habe ausgerechnet in dieser Situation den entscheidenden Gedankenblitz gehabt, welcher ihm ermöglicht habe, zusammen mit ihm ein neues Gebiet in der Mathematik zu erschliessen. Welchen Gedankenblitz hatte Dandelin? Und wohin führte ihn sein Gedankenblitz?

#### Auftakt

Nach längerem Überlegen finden die Lernenden heraus, dass der Gedankenblitz wohl weniger mit der Steinkohle als mit den russigen Grubenlampen zusammenhängt. Deshalb beleuchten die Lernenden mit Taschenlampen Wände und überlegen sich, was Dandelin wohl gesehen haben könnte. Rasch finden



Abb. 1

sie heraus, dass je nach Ausrichtung der Taschenlampe unterschiedlich beleuchtete Flecken entstehen. (Abb. 1 zeigt eine Hyperbel). Sie ordnen diese unterschiedlichen Lichtflecken und finden immer neue Zusammenhänge. Bald wird die Vermutung geäussert, dass die Wand den Lichtkegel der Taschenlampe zerschneidet und je nach Winkel unterschiedliche Formen sichtbar werden. Deshalb bilden wir den Kegel aus Knetmasse nach, zerschneiden ihn und taufen die Schnitte „Kegelschnitte“.

Um einen guten Überblick zu erhalten, ordnen die Lernenden die herausgeschnittenen Kegelschnitte



Abb. 2

auf einer grossen Wandfläche und finden vier verschiedene Gruppen mit unterschiedlichen Eigenschaften: Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln oder Kreise, abhängig von der Grösse des Öffnungswinkels des Lichtkegels und des Schnittwinkels zur Wand (Abb. 3). Das Faszinierende ist: Wir brauchen für die Unterscheidung also nur noch zwei Winkel.

Wenn wir Schaumstoffkugeln beleuchten, stellen wir fest, dass deren Schatten ebenfalls Kegelschnitten entsprechen (Abb. 4). Gleichzeitig zeigt sich im Schnittbild ganz unverhofft, dass wir mit Hilfe dieser Kugel unsere mühsame Betrachtung mit zwei Winkeln auf eine einzige Grösse

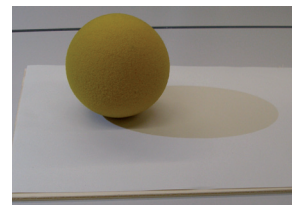


Abb. 4

einschränken können, genannt numerische Exzentrizität  $\epsilon$ . Diese Grösse ergibt sich aus der geometrischen Beschreibung der Kegel und deren Schnitte. Je nach Zahlenwert entstehen Kreise, Parabeln, Hyperbeln oder Ellipsen.

#### Die harte Arbeit

Doch wir wollen noch weiter reduzieren: Eigentlich können wir die Kegelschnitte sogar bis auf die Randlinie zwischen Licht und Schatten einschränken und nur diese mathematisch beschreiben. Zu Beginn zeichnen die Lernenden diese Randlinien mit Faden, Nadeln und Bleistift auf Papier (Abb. 5). Die Randlinien lassen sich nun eigentlich sehr einfach mit Punktmengen beschreiben: Ein Kreis beispielsweise entspricht der Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand aufweisen.

Nach einigem Überlegen finden die Schülerinnen und Schüler die Punktmengen für alle Kegelschnitte heraus (Abb. 6). Da die meisten Beschreibungen sich eigentlich als Drehungen mit unterschiedlichen Radien verstehen lassen, können mit Hilfe eines Koordinatensystems Gleichungen für die unterschiedlichen Kurven bestimmt werden (Abb. 7 zeigt die Herleitung der Parabelgleichung). So entstehen, ausgehend von den Gleichungen für Kreis und Parabel, Gleichungen für Ellipsen oder Hyperbeln.

Diese Gleichungen sehen alle irgendwie ähnlich aus und doch nicht. Welche entspricht nun welchem Kegelschnitt? Wie erkennen wir, welche geometrischen Eigenschaften ein nur durch eine Gleichung beschriebener Kegelschnitt hat? Dazu beschreiten die Lernenden den Rückweg: von der Gleichung zum Kegelschnitt.

#### Finale

Fassen wir zusammen: Kegelschnitte lassen sich also geometrisch mit nur einer einzigen Grösse beschreiben. Sobald wir die Kegelschnitte mit Gleichungen beschreiben, müssen wir für jeden Fall (Kreis, Parabel, Hyperbel etc.) eine eigene Gleichung verwenden. Wäre es nicht einfacher bzw. ästhetischer, wenn diese einzige, geometrisch bedingte Grösse auch zu einer universellen Gleichung führte? Die Schülerinnen und Schüler betrachten die Punktmengen nochmals und finden eine zweite Beschreibungsmöglichkeit, welche ihnen die Tür zu der universellen Gleichung (Abb. 8) für die Kegelschnitte öffnet. Kegelschnitte entsprechen nämlich der Menge aller Punkte, die zu einer festen Geraden

(genannt Leitgeraden) und einem festen Punkt (genannt Brennpunkt) den gleichen oder ein Vielfaches des Abstandes haben.

Dank der russigen Grubenlampe entdeckte Dandelin also im Bergwerk aufgrund von Lichtflecken, dass wir in die Kegel hinein Kugeln legen könnten. Genau diese Kugeln ermöglichen, Kegelschnitte mit nur einer einzigen Gleichung zu beschreiben. Wer nun diese Gleichung anschaut und sich überlegt, was sie bedeuten könnte, sieht vielleicht plötzlich Dandelin vor sich, wie er plötzlich fasziniert auf die Wand starrt, die Grubenlampe hebt und senkt und immer wieder angestrengt nachdenkt, bis er schliesslich vergnügt schmunzelt.

Abb. 3: Schüler beim Ordnen

Abb. 5: Schüler bei der Konstruktion mit Faden und Nadel

Abb. 6: Punktmengenbeschreibungen der Kegelschnitte

Abb. 7: Herleitung der Parabelgleichung

Abb. 8: Die universelle Gleichung für die Kegelschnitte



Abb. 3



Abb. 5

Kegelschnitt	Konstruktion	Konstruktionsanweisung
Kreis		<ul style="list-style-type: none"> <li>Nadel einstecken</li> <li>mit Bleistift Kreis zeichnen</li> </ul> $\{ P \in E \mid  MP  = \text{konst.} \}$
Ellipse		<ul style="list-style-type: none"> <li>Nadel einstecken</li> <li>mittels der Tasterklappe <math>F_1, F_2, P</math> den Bleistift bewegen</li> </ul> $\{ P \in E \mid  F_1P  +  F_2P  = \text{konst.} \}$
Parabel		<ul style="list-style-type: none"> <li>Nadel einstecken</li> <li>L auf die Leitgeraden parallel verschieben</li> <li>mit Bleistift dem L nachfolgen</li> </ul> $\{ P \in E \mid  BP  =  FP  \}$ $ BP  +  FA  =  FP  +  FA $ $ BP  =  FP $
Hyperbel		<ul style="list-style-type: none"> <li>Nadeln einstecken</li> <li>L um <math>F_2</math> drehen und mit dem Bleistift dem L entlang fahren</li> </ul>

Abb. 6

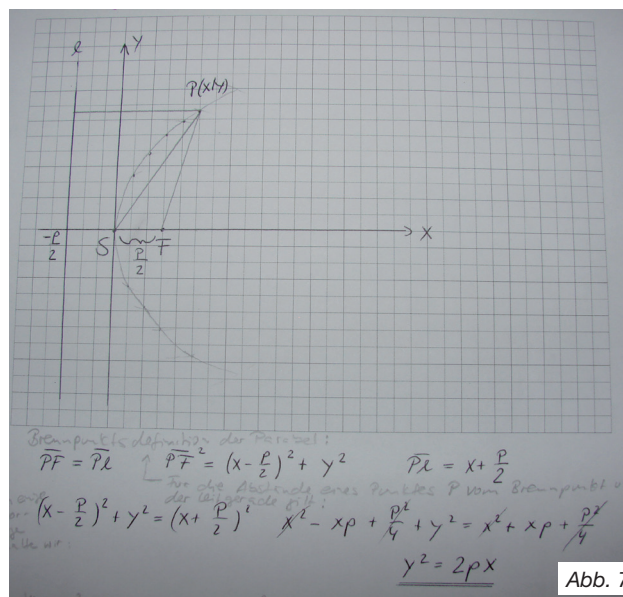


Abb. 7

**Satz: Scheitelform der Kegelschnitte**  
 In einem geeigneten Koordinatensystem lässt sich jeder Kegelschnitt beschreiben durch eine Gleichung der Form  

$$y^2 = 2px - (1 - \epsilon^2)x^2$$

Abb. 8

## Baumhöhen messen

### - auch für ungeübte Kletterer geeignet

#### Lehrstück „Strahlensätze“

komponiert von Martine Aeschlimann, Sibille Burkard,  
Anja Handschin und Adrian Häfliger

Wie hoch ist der Baum auf dem Pausenplatz, den wir täglich vom Schulzimmer aus sehen können? Mit dieser Frage steigen wir ins Lehrstück ein.

Die Schülerinnen und Schüler diskutieren zu Beginn mögliche Lösungsansätze, um die Höhe des Baumes zu ermitteln, wenn als Hilfsmittel einzig L-förmige Holzstücke und Messbänder zur Verfügung stehen und der Baum nicht gefällt werden darf. In Dreiergruppen gehen sie anschliessend nach draussen, um ihre Ideen zu konkretisieren.

Die Schülerinnen und Schüler protokollieren ihre Ideen, Vorgehensweisen, Rechnungen und Resultate und präsentieren diese anschliessend vor der Klasse. Die Gruppen haben, was wohl niemand erstaunt, verschiedene Vorgehensweisen gewählt und sind auf unterschiedliche Resultate für die Höhe des Baumes gekommen. Welche Idee ist wohl die beste? Diese Frage bleibt offen.

In der nächsten Doppellektion „holen“ wir den Baum ins Schulzimmer. Dazu werden seine Konturen auf ein Plakat gezeichnet. Dieses wird an einer Wand im Schulzimmer befestigt. Mit Schnur und Messband können die Schülerinnen und Schüler verschiedenen Strecken auf dem Plakat messen (Baumhöhe, Höhe des L-förmigen Holzstückes, Distanz Betrachter – Baumstamm etc.), insbesondere also auch solche, welche draussen nur mit den besten Kletterfähigkeiten zu bestimmen wären.

Die Lernenden entdecken Zusammenhänge zwischen den Massen des L-förmigen Holzstückes, der Höhe des Baumes und der Distanz vom Betrachter zum Baum. Es wird klar, wie die Höhe des Baumes auf dem Pausenplatz bestimmt werden kann, ohne selber mit dem Messband hochklettern zu müssen. Am Ende dieser Doppellektion hat die Klasse die Strahlensätze selber entdeckt. Mit Übungen werden anschliessend Anwendungen zu diesen Sätzen trainiert.

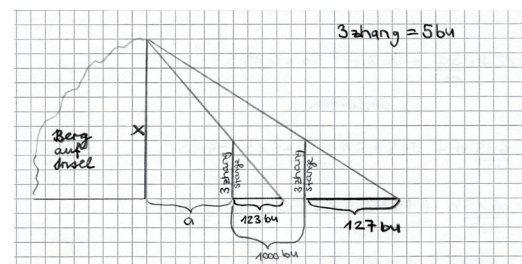
Einige Lernende bestimmten bei der Einstiegsfrage die Höhe des Baumes mit Hilfe seines Schattens. Wir greifen diese Idee auf und projizieren Comicfiguren mit einer Lichtquelle an die Wand.

Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt der Comicfigur und dem Flächeninhalt ihres Schattens? Wie verändert sich dieser, wenn die Figur näher an die Lichtquelle herangerückt wird? Wo muss die Comicfigur zwischen der Lichtquelle und der Wand positioniert werden, um eine Schat-

tenfigur mit vierfachem Flächeninhalt zu erhalten? Die Klasse experimentiert in Dreiergruppen, misst die Höhe und die Entfernung von verschiedenen Original- und Schattenflächen und berechnet ihre Flächeninhalte. Allen ist sofort klar, dass die Originalfigur und der Schatten vergleichbare Formen haben, sie sind ähnlich.

Die Lernenden machen die fundamentale Entdeckung, dass sie das Verhältnis von Originalflächeninhalt zu Schattenflächeninhalt bestimmen können, wenn sie das Verhältnis von Originalhöhe zu Schattenhöhe kennen.

Wir werfen einen Blick in die Vergangenheit. Unsere Frage nach der Baumhöhe konnte früher vielleicht so gelautet haben: Wie weit ist ein Schiff auf dem Meer entfernt? Wie hoch ist der Berg auf einer unerreichbaren Insel?



Schon vor langer Zeit haben sich die Chinesen mit solchen Fragestellungen beschäftigt. Insbesondere die Inselfrage und noch viele andere Probleme beschrieb der Chinese Liu Hui. Im 3. Jh. n. Chr. verfasste er ein Buch zu den mathematischen Grundrechenarten, das später zu einem Leitfaden für Beamte und Ingenieure wurde. Für uns ist der Anhang zum 9. Kapitel am interessantesten, da er dort Vermessungsprobleme mit nicht zugänglichen Distanzen darlegt.

Die Schülerinnen und Schüler lösen mindestens eines dieser Probleme und werden dabei mit bisher unbekanntem Längeneinheiten konfrontiert. Die ungewöhnliche Art, wie die Texte geschrieben sind, und die langen Lösungswege stellen eine besondere Herausforderung für die Lernenden dar.

Zum Abschluss dieses Lehrstücks wenden wir uns der Vermessungstechnik zu. Welche Geräte wurden im Laufe der Zeit zum Vermessen von Strecken verwendet? Wie wurden Abbilder von realen Situationen oder Gegenständen verkleinert zu Papier gebracht?

Reduktionszirkel und Pantograph werden aus Karton gebastelt und ausprobiert. Nun können beispielsweise Comicfiguren, die in einer früheren Phase des Unterrichts bereits verwendet worden sind, vergrössert oder verkleinert gezeichnet werden.

Wie hoch ist der Baum auf dem Pausenplatz nun wirklich? Wir können die Höhe jetzt zwar berechnen, aber die Bestätigung fehlt, da bisher niemand zur Baumkrone hinaufgeklettert ist...

### Lehrstück „Die Geschichte der kubischen Gleichung“

komponiert von Philipp Spindler

*Wir schreiben einen Tag im Januar 1535. In Venedig läuft das rege Tagestreiben wie immer, als der Rechenmeister Niccolò Tartaglia, den sie „den Stotterer“ nennen, seiner Arbeit nachgeht. Er hilft den Kaufleuten und Händlern beim Umrechnen von*

*Hiermit fordere ich, Antonio Maria Fior, den Rechenmeister Niccolò Tartaglia zum mathematischen Duell heraus.*

*Der Herausgeforderte möge sich Mitte Januar a.D. 1535 bei Notar Zambelli in der Foscari-gasse melden.*

*verschiedenen Währungseinheiten und bestimmt für sie die richtigen Zinsen, falls sie sich finanzielle Mittel leihen müssen. Marktschreier preisen laut ihre Ware an, Schiffsleute entladen die Schiffe und lösen die Fracht in den Kontoren, Menschen drängen sich in den Gassen auf dem Weg zu ihrer Arbeit – alles wäre heute wie sonst, wären da nicht diese roten Anschläge. Sie sind*

*überall, an den Hauswänden, an den Säulen der Kirchen, selbst an den Türen zu öffentlichen Gebäuden. Tartaglia kann diese roten Zettel nicht übersehen, sie sind an ihn gerichtet. Er wird – wieder einmal – zum Duell herausgefordert.*

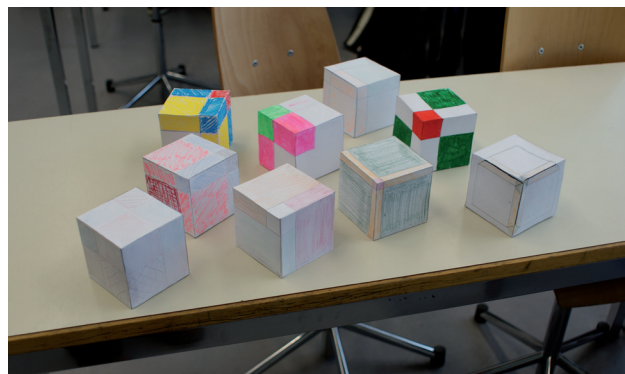
Es war im 16. Jahrhundert üblich, dass sich Rechenmeister gegenseitig duellierten. Unliebsame Konkurrenten, welche einem Rechenmeister die Kundschaft abspenstig zu machen drohten, mussten aus dem Revier hinausgedrängt werden. Ein Duell regelte die Hierarchie. Zu verlieren kostete zwar nicht das Leben, jedoch die Ehre, und das wog in diesem knallharten Wettbewerb schwer. Simpel war bei einem solchen Wettstreit nur der Ablauf: Die Duellierenden stellten ihrem Gegner einen Katalog von Aufgaben: Gewonnen hatte, wer nach Ablauf einer Frist die meisten richtig lösen konnte.

Es ist nicht lückenlos überliefert, welche 30 Aufgaben Niccolò Tartaglia seinem Kontrahenten Antoniomaria Fior stellte. Also schlüpfen die Schülerinnen und Schüler in seine Rolle und fragen sich, welche Aufgaben sie sich an seiner Stelle ausgedacht hätten. Die Aufgaben sollen schwierig sein, herausfordernd, aber auch fair und lösbar. Die Lernenden erfinden ihre eigenen Duellaufgaben und liefern sich gleichsam einen inoffiziellen Wettbewerb: Wer übertrumpft seine Klassenkameraden mit der kniffligsten Aufgabe?

Für Tartaglia muss es ein gewaltiger Schock gewesen sein, als ihm die Liste der 30 Aufgaben Fiors überreicht wurde. Sie sind uns im Original überlie-

fert und werden nun der Klasse von der Lehrperson präsentiert. Aufgabe 7: „Finde mir eine Zahl, die dreizehn ergibt, wenn man ihr zweimal ihre Kubikwurzel hinzufügt.“ Eine kubische Gleichung! Oder Aufgabe 20: „Es sind zwei Quadrate, deren Flächen zusammen 26 Ellen ergeben, und die kleinere ist die Kubikwurzel der grösseren. Ich frage nach der Fläche des grösseren!“ Tartaglia muss bleich geworden sein: Sämtliche 30 Aufgaben enthielten den gleichen Aufgabentyp, eine kubische Gleichung der Form „Ein Kubus und mehrere seiner Seiten ergeben eine Zahl“ (unter einem Kubus verstehen wir hier das Ergebnis, das wir erhalten, wenn eine Zahl einmal mit sich selber und noch einmal mit sich selber multipliziert wird). Dieses Problem war zu Tartaglias Zeit ungelöst, wurde von manchen sogar als unlösbar betrachtet. Ausgerechnet er, Tartaglia, sollte nun solche Aufgaben lösen...?!

Es blieben ihm 30 Tage Zeit, um die Lösungen zu finden, 30 sorgenvolle Tage, die die Klasse und der Lehrer zusammen im Zeitraffer miterleben. – Noch 28 Tage. Wollen wir uns dem Duell überhaupt stellen? Wenn so viele kluge Köpfe das Problem bereits als unlösbar bezeichnet haben? – Noch 23 Tage. Wir ergründen, wie der arabische Mathematiker Al-Chwarizmi (9. Jh.) die quadratische Gleichung, die „kleine Schwester“ der kubischen, löste. Indem er zwei Rechtecke und ein Quadrat zu einem grossen Quadrat ergänzte, wandelte er auf geometrischen Pfaden. Doch bei der kubischen Gleichung geht es um Würfel. – Noch 16 Tage. Regiomontanus (15. Jh.) hat versucht, Al-Chwarizmis Figur ins Dreidimensionale zu ergänzen. Ein Reinfall. – Noch 14 Tage. Wir fertigen Würfel aus Papier, um das Problem besser zu veranschaulichen.



– Noch 8 Tage. Der Nebel lichtet sich, wir treten ins gleissende Sonnenlicht: Die kubische Gleichung ist bezwungen! So wie Tartaglia am 12. Februar 1535 finden wir die Formel, mit der wir sämtliche Aufgaben Fiors in kurzer Zeit lösen können. Bedauerlicherweise heisst sie heute Cardanische Formel, trägt folglich nicht den Namen Tartaglias.

Doch was wäre gewesen, wenn Fior seine Aufgaben in einer anderen Form gestellt hätte? Etwa in dieser: „Ein Kubus und mehrere seiner Seitenflächen ergeben eine Zahl.“ Auch das ist eine kubische

Gleichung, doch auf sie können wir unsere Formel nicht mehr anwenden, da wir bis jetzt nur die Gleichungen des „Fiorschen Typs“ zu lösen im Stande sind. Für dieses neue Problem hielt Tartaglia jedoch ebenfalls die passende Antwort bereit, sie ist grossartig! Es reicht vollkommen, wenn wir nur die Gleichungen des „Fiorschen Typs“ lösen können, denn jede kubische Gleichung lässt sich mit etwas Geschick in eine Gleichung überführen, die mit der Cardanischen Formel gelöst werden kann. Das ist eine phantastische Erkenntnis, denn sie bedeutet, dass wir die ganze Herleitung nicht noch einmal von Neuem durchspielen müssen.

Die Cardanische Formel ist für einige Überraschungen gut. Die Aufgabe „Ein Kubus und zwei seiner Seiten ergeben die Zahl 12“ hat eine schöne Lösung, nämlich die Zahl 2. Benutzen wir jedoch die Cardanische Formel, um die Lösung zu berechnen, so erhalten wir einen langen und äusserst schwer verdaulichen Ausdruck mit mehreren Wurzeln. Wir gehen deshalb der Frage nach, wie Wurzelausdrücke vereinfacht geschrieben werden können. Unsere Nachforschungen führen uns zur Hochkultur der Chinesen zur Zeitenwende, zu den Persern im 11. Jahrhundert, und – erneut – zu Tartaglia, von dem ein Text im Original erhalten ist, der zeigt, wie er diese Vereinfachungen vorgenommen hat.

Unsere Reise in die Welt der kubischen Gleichungen endet bei Rafael Bombelli, einem italienischen Rechenmeister, der kurze Zeit nach Tartaglia lebte. Im Jahr 1572 beschäftigte er sich mit der kubischen Gleichung „Ein Kubus ist gleich 15 seiner Seiten und 4.“ Bombelli merkte, dass die Zahl 4 die Lösung dieses Problems ist. Die Cardanische Formel weigert sich jedoch, diese Lösung „auszuwerfen.“ Mehr noch, sie sträubt sich vehement und enthält mit der Quadratwurzel aus  $-121$  einen Ausdruck, der mit den Zahlen der Alltagswelt nicht fassbar ist. In dieser vertrackten Situation hatte Bombelli eine epochale Idee, einen „wilden Gedanken“, wie er selber schrieb: Warum sollte es uns stören, wenn wir uns diese Zahl nicht vorstellen können? Rechnen können wir doch trotzdem damit! – Es war dies die Geburtsstunde der imaginären Einheit  $i$ , jener Zahl, die wir uns nicht vorstellen können. Bombelli verglich sie mit einem Gespenst, das auftaucht, kurz herumspukt und wieder spurlos verschwindet. Mit diesem „Gespenst“ gelang es Bombelli auch, die gesuchte Lösung 4 herzuleiten.

Dass die Erfindung der imaginären Einheit jedoch 200 Jahre später zu einem fundamentalen Konzept der Mathematik werden sollte, das sogar einen Einfluss auf unsere Alltagswelt hat, konnte Bombelli unmöglich vorausahnen.

## Die Wasseruhr des ägyptischen Königs

### Amenophis III.

#### Lehrstück „Differentialgleichungen“

komponiert von Lisa Henrich und Michael Portmann

#### Einleitung

Der Sonnenstand wurde schon sehr früh genutzt, um den Tag in sinnvolle Zeiträume einzuteilen. Was tun wir aber, wenn der Himmel bedeckt ist? Was tun wir in der Nacht, wenn die Sonne nicht scheint? Aufgrund dieser Fragen wurden Vorrichtungen und Apparaturen erfunden, um Zeit zu messen.

Um 1400 v. Chr., zur Zeit des ägyptischen Königs Amenophis III., wurde die Wasseruhr erfunden (Abb. 1). Sie hat die Form eines Stumpfkegels. Der obere Durchmesser ist doppelt so gross wie der untere Durchmesser des Gefässes. Die im Inneren des Gefässes angebrachten Markierungen sind alle gleich weit voneinander entfernt. Das lässt vermuten, dass man davon ausgegangen ist, dass der Wasserspiegel in gleichen Zeitabschnitten gleich weit absinkt.



Abb. 1

Doch eignet sich dieses Gefäss tatsächlich als Zeitmesser? Oder wie müsste ein Gefäss konstruiert sein, damit der sinkende Wasserspiegel ein Mass für die Zeit gibt?

Die Lernenden versuchen nun, mit Hilfe von physikalischen Experimenten die geeignetste Form einer solchen Auslaufwasseruhr zu finden.

#### Auftakt

Vor den Schülergruppen befinden sich ein zylinderförmiges Plexiglasgefäss, eine Stoppuhr, Klebstreifen, ein Massstab und eine grosse Plastikkiste. Rasch ist das Gefäss mit Wasser gefüllt; in einem

Abb. 2: Schülerinnen und Schüler beim Experiment



weiten Bogen spritzt es unten aus dem Gefäss heraus, plätschert in die Plastikkiste und der Wasserstand im Gefäss sinkt und sinkt. Wie lange dauert es, bis das Gefäss leer ist? Wie hängen Wasserstand und Spritzweite des Wasserstrahls zusammen? Nimmt die Sinkgeschwindigkeit zu, wenn der Wasserstand immer weiter abnimmt?

### Die harte Arbeit ...

Um Antworten auf diese Fragen zu finden, werden mit Hilfe verschiedener Experimente Messungen gemacht, die in Tabellen und Diagrammen dargestellt werden. Die Interpretation dieser Messdaten ermöglicht den Lernenden, den Zusammenhang zwischen Austrittsgeschwindigkeit, Wasserhöhe im Gefäss und Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels zu erkennen: Die Austrittsgeschwindigkeit verdoppelt sich, wenn die Wasserhöhe vervierfacht wird. Die Sinkgeschwindigkeit dagegen vervierfacht sich nicht, sie wird nur doppelt so gross. Diese Zusammenhänge lassen sich durch zwei Gleichungen beschreiben (Bernoulli-Gleichung, Kontinuitätsgleichung).

### Wo sind die Grenzen?

Wie gut die Gleichungen zu den Messdaten passen, wird sichtbar, wenn die Lernenden zu den Gleichungen die passenden Kurven in Diagramme einzeichnen. Während die Gleichungen Wasser beschreiben, welches ohne Reibung und ohne Wasserwirbel aus dem Gefäss fliesst, zeigen die Messpunkte, wie Wasser mit Reibung und Wasserwirbeln durch die Röhre fliesst, und sind dementsprechend um die Kurven verteilt.

### Die mathematische Beschreibung

Bestimmen die beiden Gleichungen nicht die zeitliche Änderung der Wasserhöhe? Nach einigem Umformen erhalten die Lernenden eine Gleichung, in welcher die zeitliche Änderung der Wasserhöhe proportional zur Wasserhöhe selber ist. Gesucht

ist eine Funktion, welche, bis auf eine Konstante, einmal nach der Zeit abgeleitet wieder sich selber ergibt.

Abb. 3 
$$\frac{dh(t)}{dt} = k \cdot h(t)$$

Wie wird die Lösung einer solchen Gleichung bestimmt? Die Lernenden erfahren, dass diese Gleichung eine Differentialgleichung ist, und lernen ein dazu passendes Lösungsverfahren kennen, nämlich die Methode der Separation der Variablen. Mit Hilfe dieser Methode finden sie einen direkten Weg, die Wasserhöhe abhängig von der Zeit mathematisch auszudrücken, d.h., sie finden eine Funktionsgleichung, die diesen Zusammenhang beschreibt und zu den Messdaten passt.

### Finale

Jetzt lassen sich diverse Fragen beantworten: Wie lange dauert es, bis das Gefäss nur noch halbvoll ist? Wie lange dauert es, bis das Gefäss leer ist? Welche Wasserhöhe hat das Gefäss nach 20 Sekunden?

Angeregt durch unsere Forschungen, suchen die Schülerinnen und Schüler nach der Gefässform, die sich als Uhr nutzen lässt – die Wasseruhr.

Bei dieser Wasseruhr soll der Wasserstand in gleichen Zeitabschnitten gleich weit sinken. Gleichzeitig mit dem Wasserstand sinkt aber auch der Schweredruck des Wassers, sodass immer weniger Wasser pro Zeiteinheit aus dem Gefäss fliesst. Wenn das Wasser also gleichmässig sinken soll, dann muss das Gefäss unten immer schmaler werden. Nach längerem Grübeln finden die Schülerinnen und Schüler heraus, dass die innere Form des Gefässes sich idealerweise mit einer Parabel (quadratischen Funktion) beschreiben lässt, d.h., wenn die Höhe sich halbiert, so nimmt der Radius um das Vierfache ab. Endlich haben wir die ideale Form der Wasseruhr gefunden.

Und wir können überprüfen, ob die Wasseruhr von König Amenophis III. korrekt funktioniert, indem wir die Form der Wasseruhr mit der von uns hergeleiteten Form vergleichen. Seine Wasseruhr ist kegelförmig und nicht parabelförmig. Sie kann folglich die Zeit nicht so, wie von uns gewünscht, anzeigen. Die richtige Form wurde erst ein paar Jahrhunderte später von den Griechen gefunden. Die Wasseruhr Klepsydra (griechisch „Wasserdieb“, siehe Abb. 4) entspricht der von uns hergeleiteten Parabelform und wird also die Zeit korrekt anzeigen.



Abb. 4

### Bildnachweis:

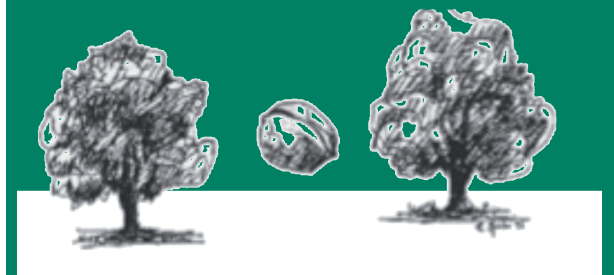
Abb.1: <http://pugetsoundblogs.com/waterways/files/2009/03/early-water-clock.jpg> (30. November 2012)

Abb.4: <http://de.wikipedia.org/wiki/Klepsydra> (30. November 2012)

### Sternstunden der Menschheit im Unterricht der Kantonsschule Alpenquai Luzern

*In der Nuss hat sich die Kraft und das Wesen  
des Baums verdichtet, und aus der Nuss wächst dann  
wieder ein neuer Baum.*

*Ähnlich bringt die Lehrkundedidaktik exemplarische  
Lehrstücke, in denen sich die Kräfte großer kulturel-  
ler Traditionen lebendig verdichtet haben – „all in a  
nutshell“ – und die nun im Leben der neuen Generati-  
on wieder zu neuen lebenskräftigen Gestalten heran-  
wachsen können.*

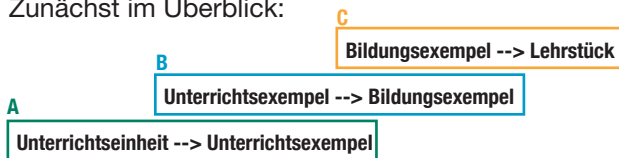


#### 1. Ansatz und Definition der Lehrkundedidaktik

Kann Lehrkundedidaktik dabei helfen, die Lebenschancen der Bildungsidee in unserem heutigen Schulunterricht zu verbessern? Das ist unsere Leitfrage. Unsere Doppelantwort: Ja, sie kann dabei helfen, erstens durch Lehrstückunterricht, zweitens durch seine Methode! „Die Lehrkundedidaktik geht aus von der gestaltenden und inszenierenden, nachvollziehenden und entwerfenden Beschäftigung mit einzelnen Lehrstücken und kehrt immer wieder zu ihnen zurück. An ihnen lernt sie, an ihnen und mit ihnen entwickelt sie sich, an ihnen findet sie Bestätigung und Korrektur. Lehrkundedidaktik trägt soweit – und nur soweit – wie ihre Lehrstücke tragen: Lehrkundedidaktik ist Lehrstückdidaktik.“ (Berg/Schulze 1995) Diese bis heute gültige Charakterisierung der Lehrkundedidaktik gemäß dem Leitsatz ‚an ihren Früchten sollt Ihr sie erkennen‘ ist in der theoriendominierten und praxisarmen Didaktik ungewöhnlich; umso wichtiger ist ihre aktuelle Definition: „Lehrkundedidaktik geht in die Lehre bei anderen Künsten und sammelt, inszeniert, komponiert und interpretiert Lehrstücke. Lehrstücke sind Unterrichtseinheiten, ausgewählt und ausgestaltet zu Bildungsexemplen nach Wagenschein und Klafki, und bewährt im heutigen Unterricht.“ (Berg 2009) Ganz neu ist die Weiterführung: „Zur Unterrichtsentwicklung auf Schulebene hat sich die Einrichtung schulinterner kollegialer Lehrkunstwerkstätten zum Aufbau eines schuleigenen Lehrstückrepertoires als Profilpunkt im Schulprogramm bewährt.“ (Eugster/Berg 2010)

## 2. Von Unterrichtseinheiten zu Lehrstücken in drei Entwicklungszügen

Zunächst im Überblick:



### (A) Von der Unterrichtseinheit zum Unterrichtsexempel:

Wagenschein (1952/1968) schaffte schon vor Jahrzehnten den ersten (Doppel)Zug: Erstens: Auswahl paradigmatischer und „exemplarischer“ Unterrichtsthemen. Zweitens: Die Methodentrias genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehrens: die Umwandlung systematisch darlegender Unterrichtseinheiten in genetisch entwickelnde Unterrichtsexempel.

### (B) Vom Unterrichtsexempel zum Bildungsexempel:

Klafki (1959) brachte kurz danach den zweiten Entwicklungszug mit dem Aufweis seiner „Theorie der kategorialen Bildung“ in Wagenscheins Unterrichtsexempel zu Newtons Gravitationstheorie; allerdings fehlte damals noch die eigene Unterrichtserprobung. Die Klärung und Ausgestaltung der Bildungsdimension von Unterrichtsexempeln wurde im Marburger Doktorandenseminar „Lehrkunst und Bildung“ (Berg/Klafki/Stübiger, seit 2001; vgl. Berg 2009, S. 180ff) aufgenommen und weitergeführt.

### (C) Vom Bildungsexempel zum Lehrstück:

Berg/Schulze (1995) schafften den dritten Entwicklungszug zur Unterrichtsinzenierung von Bildungsexempeln nach Wagenschein/Klafki in heutigen Schulen. Sie begannen mit der Unterrichtserprobung dreier Unterrichtsexempel Wagenscheins und weiterer Didaktikklassiker wie Rousseau, Faraday, Lessing u. a.; und sie fügten Eigenkompositionen im Sinne von Wagenschein/Klafki hinzu. Und zur Klärung und Konkretisierung der Lehrstückkomposition entwickelte Wildhirt (2008) die „Acht Lehrstückkomponenten“.

Es braucht drei zusammenhängende und aufeinander aufbauende Entwicklungszüge zur Ausgestaltung einer Unterrichtseinheit zum Bildungslehrstück. Nun im Einzelnen:

### (A) Aus Unterrichtseinheiten werden Unterrichtsexempel (Wagenscheins Doppelzug 1952/1968):

„Das Bildungswesen ist in Gefahr, das geistige Leben durch die Fülle des Stoffs zu ersticken. Leistung ist nicht möglich ohne Gründlichkeit und Gründlichkeit nicht ohne Selbstbeschränkung. Arbeiten-Können ist mehr als Vielwisserei. Ursprüngliche Phänomene der geistigen Welt können am Beispiel eines einzelnen vom Schüler wirklich erfassten Gegenstandes sichtbar werden, aber sie werden verdeckt durch eine Anhäufung von bloßem Stoff, der nicht eigentlich verstanden ist und darum bald wieder vergessen wird.“ Beide Leitlinien – exemplarische Themenauswahl und exemplarische Unterrichtsmethode – sind in diesen Leitsätzen der (von ihm mitverantworteten) Tübinger Resolution (1952) formuliert; sie blieben zeitlebens wegweisend für Wagenscheins Bildungsethos und Bildungsidee.

#### (A.1) Auswahl exemplarischer Unterrichtsthemen:

Immer wieder hat Wagenschein der Verflachung des Exemplarischen Prinzips zum ‚Beiherispiel-Prinzip‘, zum Beizug irgendwelcher beliebiger und gefügiger Beispiele widersprochen, am überzeugendsten und wirkungsvollsten wohl mit der Reihe seiner acht eigenen gewissermaßen „exemplarischen Exempel“, die Kuhns Paradigmendurchbrüchen entsprechen und Klafkis epochalen Schlüsselthemen, oder bildhaft gesprochen: Stefan Zweigs „Sternstunden der Menschheit“ und den „Nüssen“ des Lehrkunst-Logos und -Mottos, s. o.: Euklids Beweise (Pythagoras, Sechseck, Primzahlen), Eratosthenes' Erdkugelmessung, Archimedes' Kreis- und Körperformeln, Kopernikus' Heliozentrik, Galileis Fallgesetzformel, Pascals Barometererfindung, Newtons Gravitationstheorie, Lyells Geomorphologie. Sich zunächst auf solche zentralen Unterrichtsthemen konzentrieren und dann die angemessene wissenschaftsauthentische und jugendgemäße Unterrichtsmethode wählen – darauf kommts an!

Die drei Fotos zeigen die drei zusammenhängenden und aufeinander aufbauenden lehrkunstdidaktischen Entwicklungszüge zur Ausgestaltung von Unterrichtseinheiten zu Lehrstücken.

(A) Wagenschein hat das Thema „Luftdruck“ zum Unterrichtsexempel „Pascals Barometer“ ausgestaltet.

(B) Mit Klafki (links oben), Berg, Aeschlimann u. a. erproben, klären und optimieren wir nun in der Lehrkunstwerkstatt die Lehrkunst- und Bildungsqualität des Barometerlehrstücks.

(C) Eyer inszeniert das Barometerlehrstück nach Wagenschein/Klafki im eigenen Unterricht.





### **(A.2) Die Methodentrias: Exemplarisch-Genetisch-Dramat(urg)isch:**

Die Ausgestaltung dieser paradigmatischen Unterrichtsthemen geschieht nun gemäß der zugehörigen Unterrichtsmethode. Wagenschein hat seine zunächst exemplarische Methode später aus- und umgestaltet zur Methodentrias genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehrens (Wagenschein 1968,<sup>4</sup>2008); in der Lehrkunstdidaktik haben wir sie weitergeführt zur Methodentrias exemplarisch-genetisch-dramaturgischen Lehrens und Lernens (Berg/Brünger/Wildhirt <sup>5</sup>2011).

**Exemplarisch:** „Gründlichkeit, die im Einzelnen aufs Ganze geht“ – in diesem Leitsatz Wagenscheins sind die beiden Hauptpunkte des exemplarischen Prinzips markiert: Zunächst gilt es, das Phänomen in großer Ruhe, Nähe und Sorgfalt zu betrachten, sich darauf einzulassen, mit ihm vertraut zu werden. Und das nicht nur im anschaulichen Einstieg, sondern durchgängig: Die Wahrung der Phänomene ist im gesamten Lehr-/Lerngang zu sichern. Danach kommt der zweite Zug: Die Übertragung, der Transfer. Sowohl in die Horizontale, gemäß dem Lehrgelehnis von Laotse: Was der Schüler in der einen Ecke des Zimmers gelernt hat, soll er auch in den drei anderen Ecken anwenden lernen. Als auch in die Vertikale, gemäß Wagenschein: „Physik ohne Metaphysik bliebe oberflächlich und würde an der Geschichte der Physik und an den Interessen der Jugendlichen vorbeigehen.“

**Genetisch** wird ein Unterricht in dem Maße, in dem es gelingt, den heutigen Lehr-/Lerngang mit dem Werdegang der menschheitlichen Erkenntnis zu verbinden. Es gilt, Individualgenese und Kulturgenese undogmatisch so miteinander in Beziehung zu setzen, dass die Erkenntnisfunken herüber und hinüber fliegen. Wagenscheins Leitbeispiel: Wir verstehen den Paradigmenwechsel von der Geozentrik zur Heliozentrik, von Ptolemäus und Eratosthenes zu Kopernikus viel besser, wenn wir gemeinsam mit Ptolemäus und Eratosthenes und mit Kopernikus, Kepler, Galilei und Newton um die genetisch verdichtete neue Erkenntnis ringen, und zwar nicht nur äußerlich historisch, sondern innerlich und existenziell («begreifen, was uns ergreift»).

**Dramat(urg)isch:** Vor unseren Augen, in dramatischem Ringen, bildet sich eine bahnbrechende Erkenntnis – und wir, mittendrin, bilden uns mit: Ein doppelseitiger Bildungsprozess! Das ist die dramat(urg)ische Grundfigur. Hierzu drei Hinweise: 1. Die Lernsituation (soweit ohne Krampf und Verrenkung möglich) annähern an die ursprüngliche Situation des Erkenntnisdurchbruchs – das Urheberprinzip. 2. Lernprozesse umwandeln in möglichst kulturauthentische Handlungsprozesse – Drama heißt ja wörtlich Handlung – mit einem roten Faden von der Overtüre bis zum Finale. 3. Lebendige und authentische Spielszenen einbauen.

### **(B) Aus Unterrichtsexempeln werden Bildungsexempel (Klafki 1959):**

Die gegensätzlichen Bildungstheorien der Aufklärung und des Neuhumanismus – enzyklopädische Materialbildung (Diderot u. a.) versus Formalbildung als Geistesschulung (Humboldt u. a.) – sind in Klafkis Bildungstheorie dialektisch aufgehoben, eine bis heute grundlegend und wegweisend gebliebene praktikable Synthese. Der Kerngedanke seiner – an einem Wagenschein-Exempel entwickelten! – Theorie ist „die wechselseitige Erschließung von Subjekt und Objekt, von Mensch und Welt in ihrem inneren Wesen“.

Demgemäß versuchen wir, im Lehrstückunterricht die wesentlichen Kategorien auf der Objektseite in ihrer Tiefe und Wucht zu erschließen und auf der Subjektseite innerlich nach- und mitvollziehbar zu machen.

**Kategorie:** Konzentrieren wir uns zunächst auf grundlegende Kategorien, also auf Leitbegriffe, Leitbilder, Zentralprozesse, Paradigmenbrüche in ihrer wesentlichen und entscheidenden Tiefendynamik.

**Bildung:** Diese Kategorien dürfen wir nicht nur äußerlich lehren und lernen, sondern innerlich, existenziell, „by heart“. Wir müssen die Kategorien in uns selber aufbauen können, müssen sie uns „einbilden“ und uns selber dabei „ausbilden“ können.

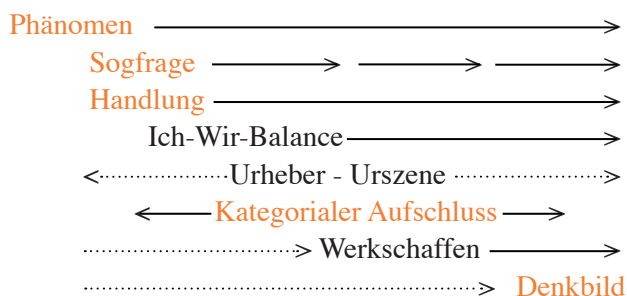
### **(C) Aus Bildungsexempeln werden Lehrstücke (Berg/Schulze 1995; Wildhirt 2008):**

Jetzt werden die von Wagenschein und Klafki nur als untergeordnete Beispiele für die übergeordnete Methode bzw. Theorie vorgelegten Bildungsexempel zur Hauptsache und werden ihrer eigentlichen Bestimmung zugeführt: Sie kommen aus dem akademischen Didaktikdiskurs in die Unterrichtspraxis! Sie werden in kollegialen Lehrkunstwerkstätten – methodisch und theoretisch unterstützt aber nicht dominiert – für den heutigen Schulunterricht eingerichtet und im Unterricht erprobt, variiert und optimiert; auch neue werden komponiert. Und in diesen Kompositions- und Inszenierungsprozessen werden die Bildungsexempel umgewandelt und ausgeformt zu Lehrstücken. – Unsere langjährigen Erfahrungen haben sich inzwischen zu Orientierungskarten für Lehrstückunterricht und Werkstatt-Treffen geklärt:

**Acht Lehrstückkomponenten** (ausführlich vgl. Wildhirt 2008, S. 51-64)

„Ein Lehrstück beginnt normalerweise mit einem Phänomen (1), das im Verlauf des Unterrichts nicht etwa verschwindet, sondern bis zum Ende der Unterrichtseinheit präsent bleibt. Aus der Betrachtung des Phänomens erheben sich verschiedene Fragestellungen. Eine oder mehrere so genannte „Sogfragen“ (2) kristallisieren sich als weiterführend heraus und übernehmen die Führung im Unterrichtsaufbau. Die Handlung (3) entwickelt sich, sobald die Schülerinnen und Schüler den Unterrichtsgegenstand zu „ihrer Sache“ machen. Die Ich-Wir-Balance (4) be-

schreibt das Verhältnis der LernerInnen als Einzelne gegenüber der Sache und als Beteiligte und Mitgestalter des Lernprozesses in einer Gruppe. Das Maß, in dem die SchülerInnen im Unterrichtsverlauf partizipieren und selbst zu Akteuren des eigenen Lernens werden, ist für die Nachhaltigkeit des Lernens und die Vertiefung zum Bildungsereignis von großer Bedeutung, denn: Lehrstücke sind „improvisations-offene Mitspielstücke“. Wo immer möglich treten Urheber (5) einer Entdeckung oder Erfinder eines Werks szenisch auf, und sie helfen (wo nötig) beim Kategorialen Aufschluss (6), beim Sprung in eine neue Erkenntnis, die durch sie einst das Licht der Welt erblickt hat und jetzt gerade im Unterricht wieder neu erblickt, und die im Werkschaffen (7) und/oder im Denkbild (8) ihren Ausdruck findet.“



### 3. Ein dankbarer Ratschlag zum Weitergang

Die Spezifik der Luzerner Lehrkunstwerkstatt ist ihre Fachzentrierung: Zehn MathematiklehrerInnen, fast alle mit naturwissenschaftlichem Zweitfach, waren ihre Mitglieder. Nach meinem Eindruck hat das eine hohe Kooperationsdichte, Arbeitseffizienz und Fachqualität gebracht. Offenkundig ein Erfolgsmodell: Bravo und bitte weiter so – Einerseits! Andererseits: Wie lassen sich Allgemeininteresse, Allgemeinverständlichkeit und Allgemeinbildung im Mathematikunterricht sichern? Die charmanten Redaktionshinweise des Deutschkollegen, die weit über sprachliche Verbesserungsvorschläge hinausgehen, signalisieren, dass er als Anwalt der Laien immer wieder Verständnisprobleme hatte. Auch ich selbst habe mich bei manchen Werkstatt-Treffen als einziger Mathematik-Amateur fast auf verlorenem Posten gefühlt gegenüber der Phalanx freundlicher und exzellenter Matheprofis. Denn Achtung: Die meisten Schüler werden später nicht Mathematik-Profis, sondern – hoffentlich! – Mathe-Amateure. Mathematik wird nur selten das Hauptfach ihres Lebens werden, aber oft eine Dimension ihres Berufslebens, und hoffentlich auch eine Dimension ihrer geistig-kulturellen Weltorientierung. Diese Amateurdimension des Fachunterrichts ist in den fächerverbindenden Lehrkunstwerkstätten der anderen Pilot-schulen stärker gewährleistet – aber vielleicht auf Kosten ihrer Facheffizienz?

Daher mein Ratschlag: Gemäß der bewährten Regel *never change a winning team* rate ich, eine zweite geistes- und sozialwissenschaftliche Q-Lehrkunstgruppe mit ähnlicher Fachkonzentration aufzubauen. Nun aber – und das wäre neu – beide Fachgruppen immer wieder einmal „konzertant“ in einer gemeinsamen Lehrkunstwerkstatt zusammenzuführen. Bei der gemeinsamen Arbeit sind dann alle KollegInnen Profis *und* Amateure. Eine fächerverbindende Zusammenarbeit kann sich einspielen, die zunächst bescheiden auf die Entwicklung von allgemeininteressierenden, allgemeinverständlichen und allgemeinbildenden Lehrstücken im jeweiligen Fachunterricht zielt – mit der zusätzlichen Perspektive der Erarbeitung fächerverbindender Lehrstücke.

Von Hans Christoph Berg\*/Hans Brüngger

\* Hans Brüngger und ich haben die Luzerner Lehrkunstwerkstatt von 2006 bis 2009 geleitet. In diesem Rahmen hat Marc Eyer Wagenscheins Barometerlehrstück vorgestellt; Michael Jänichen hat sein Himmelskundelehrstück direkt an Lukas Fischer übermittelt. Und Susanne Wildhirt hat in einer eigenen Weiterbildungsveranstaltung Faradays Kerze eingeführt.

#### Literatur

Berg, Hans Christoph/Schulze, Theodor (1995) : *Lehrkunst. Lehrbuch der Didaktik*. Neuwied: Luchterhand

Berg, Hans Christoph u. a. (2009): *Die Werkdimension im Bildungsprozess. Das Konzept der Lehrkunstdidaktik. (Lehrkunstdidaktik Band 1)*. Bern: hep.

Berg, Hans Christoph/Brüngger, Hans/Wildhirt, Susanne (2011): *Lehrstückunterricht. Exemplarisch – Genetisch – Dramaturgisch*. In: Wiechmann, Jürgen (Hrsg.): *Zwölf Unterrichtsmethoden. Vielfalt für die Praxis*. Weinheim: Beltz.

Eugster, Willi/Berg, Hans Christoph (Hrsg.) (2010): *Kollegiale Lehrkunstwerkstatt. Sternstunden der Menschheit im Unterricht der Kantonsschule Trogen. (Lehrkunstdidaktik Band 3)*. Bern: hep.

Klafki, Wolfgang (1959) : *Kategoriale Bildung. Zur bildungstheoretischen Deutung der modernen Didaktik*. In: Klafki (1964): *Studien zur Bildungstheorie und Didaktik*. Weinheim: Beltz

Tübinger Beschlüsse (1951): *Fünf Resolutionen der Konferenz „Universität und Schule“*. In: *Deutscher Ausschuss für das Erziehungs- und Bildungswesen* (1966). Stuttgart: Klett

Wagenschein, Martin (1952): *Das Fallgesetz im Brunnenstrahl*. In: *Martin Wagenschein (1953) (1975): Natur physikalisch gesehen*. Braunschweig: Westermann

Wagenschein, Martin (Klett 1980, 42009): *Naturphänomene sehen und verstehen. Genetische Lehrgänge. Das Wagenschein-Studienbuch. Herausgegeben von Hans Christoph Berg. (Lehrkunstdidaktik Band 4)* Bern: hep

Wagenschein, Martin (1968, 42008) : *Verstehen Lehren. Genetisch – Sokratisch – Exemplarisch. Mit einer Einführung von Hartmut von Hentig und einer Studienhilfe von Hans Christoph Berg*. Weinheim: Beltz

Wildhirt, Susanne (2008): *Lehrstückunterricht gestalten. Linnés Wiesenblumen – Aesops Fabeln – Faradays Kerze. Exemplarische Studien zur lehrkunstdidaktischen Kompositionslehre. Mit einem Nachwort von H. Chr. Berg. (Lehrkunstdidaktik Band 2)*. Bern: hep.

## Quellen:

- [1] Barrow, John D. (2005): The Infinite Book. A short guide to the boundless, timeless and endless. New York: Pantheon Books.
- [2] Brüngger, Hans (2004): Von Pythagoras zu Pascal. Fünf Lehrstücke der Mathematik als Bildungspfeiler im Gymnasium. Dissertation. Marburg.
- [3] Brüngger, Hans (2005): Von Pythagoras zu Pascal. Erprobte Unterrichtsvorlagen aus der Lehrkunstwerkstatt. Berner Lehrstücke. Band 3. Bern.
- [4] Jänichen, Michael (2010): Dramaturgie im Lehrstückunterricht. Himmelsuhr und Erdglobus – Howards Wolken – Erd-Erkundung mit Sven Hedin. Ein Beitrag zur Theorie, Praxis und Poiesis der Lehrkustdidaktik. Dissertation. Marburg.
- [5] Nölle, Beate E. (2007): Wagenschein und Lehrkunst in mathematischen Exempeln: Entwicklung, Erprobung und Analyse dreier Lehrstücke für den Geometrieunterricht. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- [6] Wildhirt, Susanne (2007): Lehrstückunterricht gestalten. Linnés Wiesenblumen, Aesops Fabeln, Faradays Kerze. Exemplarische Studien zur lehrkustdidaktischen Kompositionslehre. Dissertation. Marburg.

## Weiterführende Literatur:

- Berg, Hans Christoph u.a. (2009): Die Werkdimension im Bildungsprozess. Das Konzept der Lehrkustdidaktik - Band 1. Bern: hep.
- Brüngger, Hans u.a. (2008): Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Pascal – Band 5. Bern: hep.
- Eugster, Willi / Berg, Hans Christoph (2010): Kollegiale Lehrkunstwerkstatt. Sternstunden der Menschheit im Unterricht der Kantonsschule Trogen – Band 3. Bern: hep.

## Impressum:

Herausgeber: Philipp Spindler, Kantonsschule Alpenquai Luzern

Autoren: Martine Aeschlimann, Franco Antognoli, Hans Christoph Berg, Hans Brüngger, Sibille Burkard, Lukas Fischer, Adrian Häfliger, Anja Handschin, Elisabeth Henrich, Hans Hirschi, Margrit Keller, Daniel Muzzolini, Michael Portmann, Philipp Spindler

Textredaktion: Ivo Zemp  
Gestaltung: Daniela Dändliker

[www.ksalpenquai.lu.ch](http://www.ksalpenquai.lu.ch)  
Bezug: [info.ksalp@edulu.ch](mailto:info.ksalp@edulu.ch)

Druck: Copy Center La Palma, Stansstad  
Auflage: 1000 Stück  
Luzern, 2013

