FRIEDRICH-RAABE kommt diesem Hinweis nach und auch ich bin diesem Hinweis in den ersten beiden Inszenierungen des Sechssterns gefolgt. Doch schon bei der zweiten Inszenierung gab es berechtigten Widerspruch der Schüler. Motiviert durch den einige Stunden zuvor gelesen Sokratischen Dialog RÉNYIs über die Idealität geometrischer Figuren argumentierten die Schüler, dass es sich bei den von mir verteilten gleichseitigen Dreiecken ja nur ungefähr um gleichseitige Dreiecke, d. h. um Repräsentanten der Idee eines gleichseitigen Dreiecks handele und die Frage, ob sich sechs bzw. drei von ihnen rundherum zusammenschieben bzw. an einer Geraden anlegen lassen, praktisch niemals mit Sicherheit überprüft werden könne. In der finalen Version des Lehrstücks deute ich diese (scheinbare) Möglichkeit der Überprüfung daher nur an und nutze die Gelegenheit, um noch einmal über die Idealität geometrischer Figuren zu diskutieren. Sehr wohl werden aber nach der Formulierung des Beweises und der Entdeckung der Axiomatik die EUKLIDischen Axiome mit gleichseitigen Dreiecken visualisiert – diesen Schritt halte ich für unentbehrlich.

(3) Ausschnitt aus dem Film LINCOLN (2012)
Die beschriebene Szene aus dem Historiendrama „LINCOLN" (2012) konnte in der für dieses Kapitel zentralen Inszenierung noch nicht eingesetzt werden, da der Film zu diesem Zeitpunkt noch nicht erschienen war (er kam in den USA erst im November 2012, in Deutschland sogar erst im Februar 2013 in die Kinos). In einer späteren Inszenierung des Axiomatik-Lehrstücks jedoch (Oktober 2013) nahm die 40-sekündige LINCOLN-Szene eine gewichtige Rolle ein. Sie ist für mich nun ein fester Bestandteil des Lehrstücks, weshalb sie in der folgenden Kompositionstabelle mit aufgeführt wird.

Komposition des Lehrstücks „Entdeckung der Axiomatik am Sechsstern mit EUKLID"

Gliederung	*Titel*	*Inhalt*
Ouvertüre *2 Stunden* 1.-2. Lektion	*Die Zirkelrose als Gemeinsamkeit vielfältiger geometrischer Wunder aus Natur und Kultur*	(i) Die Schüler werden mit einer Vielzahl unterschiedlicher, facettenreicher geometrischer Formen aus Natur und Kultur (HAECKEL 1899, BENTLEY 1898, COWEN 1979) konfrontiert und erkennen, dass alle Formen auf einem regelmäßigen Sechseck basieren. (ii) Sie entwickeln als deren gemeinsame Ausgangsfigur die Zirkelrose. (iii) Anschließend diskutieren sie die Genauigkeit der angefertigten Zirkelrosen und erkennen mithilfe des gemeinsam gelesenen „Sokratischen Dialogs" (vgl. RENYI 1966; gekürzt), dass perfekte geometrische Figuren nur theoretisch existieren, die Perfektion der Zirkelrosen also ein praktisches, kein gedankliches Problem darstellt.
I. Akt *2 Stunden* 3.-4. Lektion	*Die Warum-Frage als Motor des Suchprozesses*	(i) Ein fragwürdiges Phänomen, welches wir gemeinsam mit EUKLID intensiv diskutieren und uns deutlich vor Augen führen: *Warum* schließt sich die Zirkelrose ganz genau? Mathematisch formuliert: *Warum* lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises genau sechsmal auf dem Kreis abtragen? (ii) Bevor das Problem fachlich behandelt wird entwickeln die Schüler gemeinsam allgemeine Strategien zur Problemlösung.
II. Akt *2 Stunden* 5.-6. Lektion	*Die strategische Suche nach einer Begründung der Entdeckung*	Gemeinsam entwickeln wir mithilfe der zuvor formulierten Strategien eine Antwort auf die Warum-Frage, indem wir das Problem Schritt für Schritt vereinfachen: (i) Zeichnet man in die Wimpernfigur, eine vereinfachte Zirkelrose, alle Kreisradien ein, erhält man ein Sechseck. (ii) Das Problem kann nun ohne Kreis formuliert werden: Lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke rundherum zusammenschieben? (iii) Durch Halbierung der Figur wird das Problem erneut vereinfacht: Können drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander und lückenlos an einer Geraden angelegt werden? (iv) Schließlich lässt sich die Ausgangsfrage auf die einfache Tatsache zurückführen, dass man ein Dreieck in der Ebene verschieben kann.

III. Akt *2 Stunden* 7.-8. Lektion	*Die Analyse des EUKLIDischen Beweises und die Entdeckung seiner zehn Axiome*	(i) Mithilfe der angefertigten Skizzen durchlaufen wir unsere Begründung erneut vor und zurück und identifizieren sie jetzt erstmalig als sauberen, mathematischen Beweis, welcher von jedem Schüler individuell ausformuliert wird. (ii) Wir lernen die Elemente des EUKLID kennen, versuchen, seinen 2.500 Jahre alten Beweis für das identische Problem zu verstehen und analysieren die Struktur seines Beweises (Voraussetzung – Behauptung – Beweis) ganz genau. Dabei entdecken wir, dass dieser schließlich auf nur wenigen Grundsätzen, sogenannten Axiomen, Definitionen und Postulaten beruht. (iii) Die Axiome visualisieren wir schließlich mithilfe von gleichseitigen Dreiecken. (iv) Eine Szene aus dem Historiendrama „LINCOLN" (2012), in welcher der amerikanische Präsident voller Evidenz und unter Bezugnahme auf das erste Axiom EUKLIDs sein Menschenbild erläutert, spannt schließlich einen 2.000 Jahre umfassenden Bogen von den antiken Elementen zu einer der zentralsten Personen der Menschheitsgeschichte.
Epilog *4 Stunden* 9.-12. Lektion	*Entdeckung, Beweis und Anwendung des Satz des THALES*	(i) Auf dem Schulhof entdecken wir den Satz über den Halbkreis (später wird er Satz des THALES heißen): Zwei Schüler stehen sich einige Meter voneinander entfernt gegenüber, die übrigen stehen auf einem Halbkreis davor. Nun geht der Blick vom einen Schüler zum andern und zurück: Immer eine viertel Umdrehung? Immer? Zu schön um wahr zu sein. (ii) Zurück in der Klasse beweisen wir unsere Entdeckung. (iii) Mit einigen Übungen vertiefen wir unsere Erkenntnis.

Tab. 14: Überblick über die Komposition des Lehrstücks „Entdeckung der Axiomatik am Sechsstern". Die Nummerierungen in Klammern bezeichnen die einzelnen Szenen des jeweiligen Aktes.

3.3.2 Durchführung: Inszenierungsbericht März 2012

Rahmenbedingungen

Im Schuljahr 2011/2012 unterrichtete ich zwei erste Klassen (8. Jahrgangsstufen) des Gymnasium Leonhard Basel (Schweiz) jeweils mit vier Wochenstunden in Mathematik. Nachdem ich das Lehrstück zur Entdeckung der Axiomatik bereits Ende 2011 in einer dieser Klassen unterrichtet hatte, inszenierte ich es im März 2012 in der entsprechenden Parallelklasse erneut. Der folgende Bericht basiert auf dieser zweiten Inszenierung.
Die Klasse setzte sich damals aus 16 Schülerinnen und fünf Schülern zusammen. Das Verhältnis der Schüler untereinander war, wie auch mein mein Verhältnis zu den Schülern, äußerst angenehm. Im Unterricht fiel vor allem die übermäßige Lebhaftigkeit vieler Schüler auf. Doch wenn erst einmal eine produktive Arbeitsatmosphäre vorhanden war, zeigte sich die Klasse durchaus leistungsstark mit einem breiten Beteiligungsprofil. Vor allem einige Schülerinnen brachten an unterrichtlichen Schlüsselstellen oft entscheidende Impulse und Ideen ein, womit sie maßgeblich zum Lernerfolg der Gruppe beitrugen.
Leider jedoch fielen einige Schüler häufig in ihrer Gesprächskultur negativ auf (geringe Kompetenz bei der Übernahme von Hörer- und Sprecherrolle und dem Einhalten von Gesprächsregeln, fehlende Selbstregulierung bzgl. der nicht-verbalen, kommunikativen Haltung). Sobald ihnen das im Unterricht besprochene zu anspruchsvoll oder auch zu anspruchslos erschien, beschäftigten sie sich schnell anderweitig und begannen private Diskussionen mit Mitschülern, so dass die zuvor erzeugte Arbeitsatmosphäre manchmal sehr schnell beendet und ein konzentriertes Arbeiten nicht mehr möglich war. Dies wurde im Vorfeld des Lehrstücks bereits mehrfach mit Schülern und Eltern thematisiert, so dass in den Wochen vor Beginn der hier beschriebenen Inszenierung zwar eine Besserung eingetreten, die Klasse diesbezüglich aber noch immer weit entfernt von einem normalen, akzeptablen Maß war. Nur durch eine sehr deutliche Phasierung der Stunden konnte diese Problematik weitestgehend eingeschränkt werden.

Ouvertüre (Mi., 14.03.2012, 1./2. Lektion)

Vorbemerkung: Der Rahmen zur Durchführung der Ouvertüre war sehr besonders. Um einigen Teilnehmern der schulinternen Lehrkunstwerkstatt (Kollegen, Mitglieder der Schulleitung, Werkstattleiter), die an diesem Tag für das erste Werkstatttreffen 2012 zusammen gekommen waren, den Besuch einer Lehrstück-Ouvertüre zu ermöglichen, verlegte ich den Unterricht, der eigentlich in den ersten zwei Lektionen hätte stattfinden sollen, auf den Nachmittag. Insgesamt waren acht Personen zu Gast, darunter auch der Filmemacher Reinhard KAHL. Durch den Besuch der Werkstatt wurde er darin bestärkt, das lehrkunstdidaktische Arbeiten filmisch zu dokumentieren. Ein entsprechendes Projekt ist in Arbeit, erste Dreharbeiten wurden bereits durchgeführt (Stand: April 2014).

Es folgt nun der im Präsens verfasste Inszenierungsbericht.
Der in die 8./9. Stunde verlegte Unterricht beginnt um 14.10 Uhr. Als ich mit der großen Besucherdelegation, die ich den Schülern bereits in der vorhergehenden Mathestunde einige Tage zuvor angekündigt hatte, vor dem Klassenzimmer auftauche, sind die Schüler bereits fast vollständig versammelt. Bereits am Vormittag hatte ich die Gelegenheit, den Raum vorzubereiten: Alle Tische sind nun am Rand des Klassenzimmers zu Gruppentischen zusammengestellt, die Stühle bilden in der Mitte des Raumes einen Stuhlkreis, auf jedem Stuhl liegt eine kleine Briefrolle, die mit einem farbigen Band verschlossen ist. Als die Schüler den Raum betreten bitte ich sie, sich einen Platz zu suchen, die Briefrollen aber noch nicht zu öffnen. Als alle einen Platz gefunden und sich mit der Situation angefreundet haben, erläutere ich noch einmal kurz den Grund für den heutigen Besuch. „Seid so wie immer", gebe ich ihnen aufmunternd zu verstehen.
Dann steigen wir ein: Stumm verteile ich insgesamt neun DIN-A3-Plakate so in der Mitte auf dem Boden, dass jeder Schüler mindestens zwei von den Plakaten gut betrachten kann. Die Plakate zeigen jeweils mit einer knappen Erläuterung drei Abbildung aus COWEN (1979) – (1) die Nordrosette der Kathedrale Notre-Dame de Paris, (2) die Westrosette der Kathedrale Notre-Dame-en-Vaux Châlon, (3) vielfältiges Maßwerk – aus HAECKEL (1899/2000) – (1) das Strahlentierchen „Circostephanus coronarius", (2) die Rüsselqualle „Carmaris Giltschi", (3) einen gehörnten Kofferfisch – und drei unterschiedliche Schneeflocken aus BENTLEY (1898/2000). Ich kommentiere nichts, das Material hat offenbar einen so hohen Aufforderungscharakter, dass die Schüler gleich beginnen, die Bilder zu betrachten und die Texte zu lesen. Auch in früheren Inszenierungen habe ich bereits diese Erfahrung gemacht. Mit dem Verteilen der Bilder kehrt eine konzentrierte Stille ein.

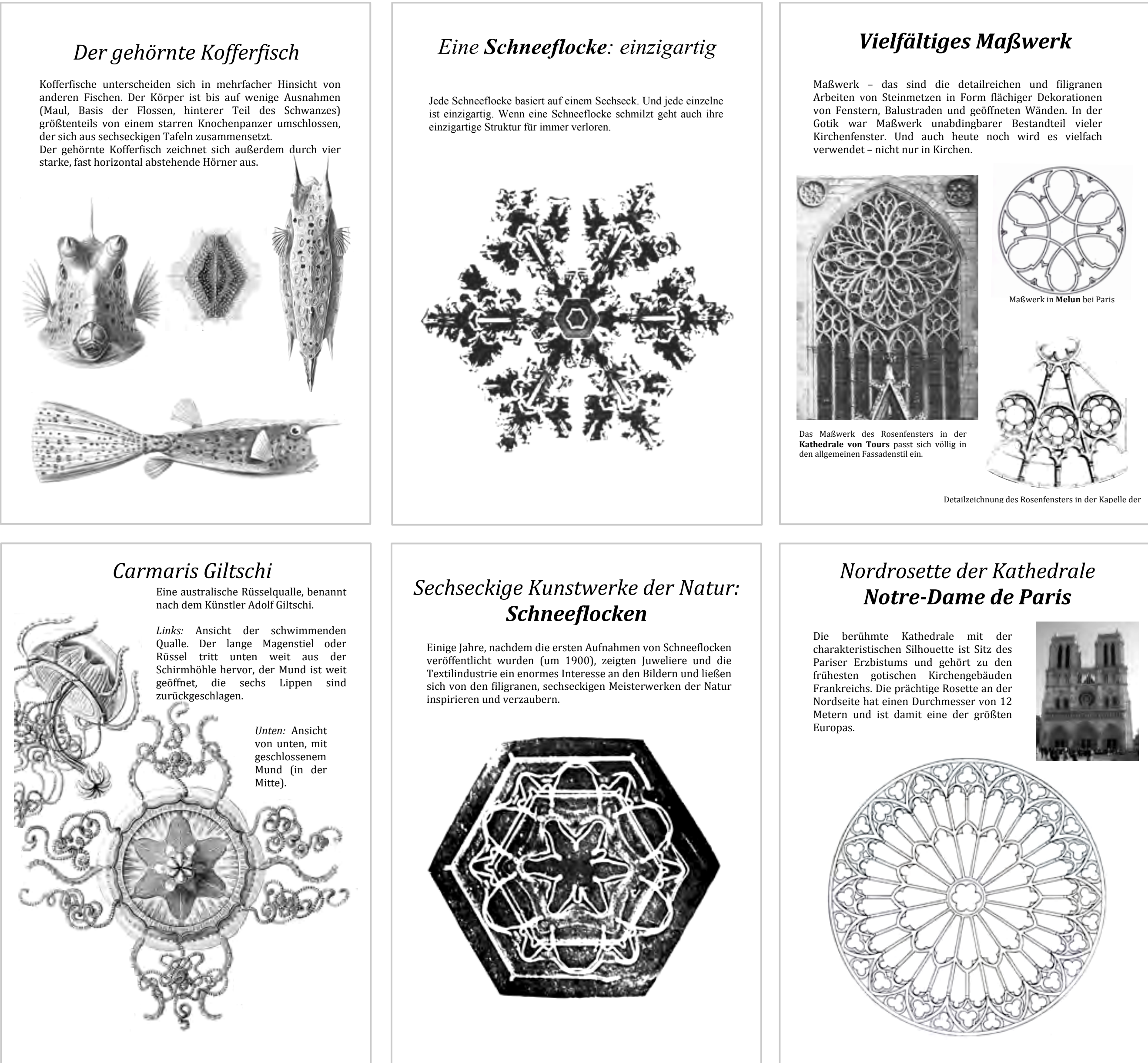

Abb. 24: Die neun Plakate, die zu Beginn der Ouvertüre auf dem Boden ausgelegt werden.

Nach etwa einer Minute bitte ich Matteo, Rosanna und Amon, den Text auf den jeweils vor ihnen liegenden Plakaten – es sind die Maßwerke, die Rüsselqualle „Carmaris Giltschi" sowie eine Schneeflocke – laut vorzulesen. „Die Natur hat Kunstinstinkt" – ein Satz des frühromantischen Schriftstellers NOVALIS (1772-1801), der hier lebendig zu werden scheint. Ich schaue in die Runde, Fragen gibt es keine, die Schüler betrachten noch immer die Plakate und scheinen zu überlegen, wohin der Unterricht heute laufen soll. Ich greife in meine Tasche, ziehe die drei Bücher, aus denen ich die Abbildungen entnommen habe, heraus und stelle sie der Reihe nach knapp vor. Ich beginne mit BENTLEYs „Snowflakes in Photographs". Die Abbildungen faszinieren: „Wie konnte BENTLEY damals schon solche Aufnahmen machen?", fragt Roberto erstaunt. Ich erläutere, dass BENTLEY jahrelang an einem geeigneten Verfahren geforscht hatte. Seine Mutter schenkte ihm ein Mikroskop, als er gerade 15 Jahre alt war. Und während die anderen Jugendlichen durch das kleine Dorf Jericho in den Bergen des US-Bundesstaates Vermont zogen, blickte der junge Farmerssohn durch sein Mikroskop und betrachtete Blüten, Wassertropfen, Vogelfeldern – und Schneekristalle. Er zeichnete alles auf, doch die Details waren so nur schwer zu erfassen. Und so überredet BENTLEY seinen Vater, ihm eine teure Balgenkamera zu kaufen. Jahrelang experimentierte er nun, um damit irgendwie durch das Mikroskop hindurch fotografieren

zu können – mit Erfolg: Nach einigen Jahren gelangen ihm die ersten mikroskopischen Aufnahmen von Schneekristallen. Insgesamt machte er zu Lebzeiten über 5.000 von ihnen – immer mit Handschuhen und in eisiger Kälte. „Leider hat er die Veröffentlichung seiner Fotografien nicht mehr miterlebt, er starb zuvor an einer Lungenentzündung“, berichte ich und schließe damit meinen kurzen Exkurs zu Wilson BENTLEY.
Ich komme zum nächsten Buch. Alle Schüler der Klasse belegen das Schwerpunktfach „Bildnerisches Gestalten“, weshalb ich auf HAECKELS „Kunstformen der Natur“ (1899/2000) besonders intensiv eingehe. Das Buch enthält über 100 farbige Drucke mit Bildtafeln verschiedener Organismen, die größtenteils zum ersten Mal überhaupt von HAECKEL beschrieben wurden. Ich berichte, dass Ernst HAECKEL, der unter anderem 1866 den Ökologie-Begriff definiert und geprägt hat und darüber hinaus durch seine Schriften sehr zur Verbreitung des Darwinismus in Deutschland beigetragen hat, bedeutender Biologe, Arzt und Philosoph war und mehr als die Hälfte seines Lebens auf Forschungsreisen verbracht hat. Da es zu seiner Zeit zwar schon Mikroskope, aber keine Möglichkeit gab, das durch das Mikroskop Beobachtete zu fotografieren, war HAECKEL (wie auch sein Zeitgenosse BENTLEY) gezwungen, all seine Beobachtungen aufzuzeichnen. Alle Tafeln in dem Buch basieren auf Skizzen und Aquarellen HAECKELS. Bei dieser Arbeit half ihm seine künstlerische Begabung sehr, ohnehin sah HAECKEL die Biologie in vielen Bereichen mit der Kunst verwandt. Die Schüler sind beeindruckt, als ich durch das Buch blättere, auf einige Details in den Zeichnungen hinweise und betone, dass HAECKEL als erster Mensch überhaupt hunderte dieser Arten beschrieb. „HAECKELS Arbeiten waren aber nicht nur bedeutend für die Biologie“, sage ich und präsentiere ein weiteres Buch: „Natur und Kunst“ von René BINET (2007). Ich berichte, dass BINET ein französischer Architekt war, den die Abbildungen HAECKELS, mit denen sich BINET intensiv auseinander gesetzt hat, in besonderem Maße inspirierten. Bei zahlreichen seiner Entwürfe von Gartenanlagen, Portalen, Stühlen, Teppichen, Torbogen, Glasfenstern, Laternen, Lüstern, Tapeten, Türbeschlägen, Vitrinen und Dekorationen standen HAECKELS Zeichnungen Pate. Während ich davon erzähle blättere ich durch das Buch, welches eine exquisite Darstellung zahlreicher Entwürfe BINETS enthält. Amon erkundigt sich, ob es diese Tische und Stühle tatsächlich gibt. Ich erläutere ihm, dass BINETS Lebenszeit nur kurz bemessen war (1866-1911) und dass er deshalb kaum Möglichkeiten hatte, seine Entwürfe zu realisieren. „Die ‚Porte Monumentale‘, das monumentale Eingangstor zur Pariser Weltausstellung von 1900, war das einzig fertiggestellte Werk von Bedeutung“ erläutere ich, während ich eine Abbildung des Tores zeige (vgl. Abb. 25).

Abb. 25: René BINET, *Porte Monumentale* für die Pariser Weltausstellung, 1900.

Nun ist es Zeit, die Briefrollen, die zu Beginn der Stunde auf den Stühlen lagen, zu öffnen. Ich bitte die Schüler, das darauf abgedruckte Bild zu betrachten, den Text leise zu lesen und die Blätter dann so vor sich auf den Boden zu legen, dass die Mitschüler diese gut sehen können. Wir betrachten die zahlreichen Abbildungen gemeinsam und wiederum fordere ich zwei Schüler auf, die Texte eines Blattes ihrer Wahl laut vorzulesen. Dass alle Abbildungen aus den drei Büchern stammen, die ich kurz zuvor präsentiert habe, stellen einige sofort fest und ich ergänze, dass keine einzige der nun vor uns liegenden Abbildungen doppelt vorkommt. Dann stelle ich eine Frage – mittlerweile sind fast 30 Minuten vergangen – die erstmalig wieder den Fokus konkret auf das Fach richtet: „Was hat das alles eigentlich mit Mathematik zu tun?“ Einige Schüler sind sehr schnell mit ihren Äußerungen: „Symmetrien“ vermutet Ada. Ich fordere sie auf, die Bilder zu zeigen, welche sie zu dieser Annahme verleitet haben. Mein „Einverstanden?“ mit Blick in die Runde regt einige kleinere Diskussionen an, Maida ist die erste, die auf den Kofferfisch deutet und sagt, sie könne dort keine echten Symmetrien erkennen. Kopfnickend pflichten ihr einige Mitschüler bei. Ich betone, dass es aber eine Gemeinsamkeit *aller* ausliegenden Abbildungen gibt. Nach wenigen Sekunden sagt Noah noch etwas unsicher und leise: „Es sind alles Sechsecke." Wieder ist Maida kritisch: „Der Kofferfisch ist doch kein Sechseck", bemerkt sie ungläubig, wird aber sogleich von Melina korrigiert: „Doch, jede einzelne Schuppe ist ein Sechseck." Jetzt haben wir das Phänomen vor Augen, in dem wir schon seit über 30 Minuten baden! Ich provoziere: „Ich kann bei dem Rosenfenster von Notre-Dame de Paris aber kein Sechseck erkennen." Tatsächlich handelt es sich um eine sechszehnfach unterteilte Rosette, in deren Zentrum allerdings durchaus ein Sechseck auftaucht – dies entdeckt Roberto, zu dessen Füßen das A3-Plakat liegt. Auf dem Boden kniend zeigt er seinen Mitschülern das Sechseck. Auch bei den übrigen Abbildungen suchen wir Sechsecke: Dass alle Schneeflocken auf einem Sechseck basieren ist offensichtlich, bei der Rüsselqualle aber müssen wir schon genauer hinsehen (es ist der Mund, den man in der Ansicht von unten besonders gut erkennen kann).

Abb. 26: Badend in einer Vielfalt natürlicher und kultürlicher Sechsecke.

Ich fasse zusammen: „Vieles, was uns in Natur und Kultur begegnet, basiert auf geometrischen Formen, bspw. auf einem Sechseck. In all diesen Abbildungen, die wir vor uns haben, tauchen Sechsecke auf. Nun meine Frage: Gelingt es uns, alle Abbildungen in nur einer einzigen zusammenzufassen?" Meine Frage löst zunächst Erstaunen aus, weshalb ich konkretisiere: „Können wir eine Figur erzeugen, aus der sich all diese Formen ableiten lassen?" Ich merke, dass ein paar Schüler bereits konkrete Ideen haben, lasse sie diese aber zu diesem Zeitpunkt lieber nicht vortragen, weil ich möchte, dass sich zunächst alle Schüler mit diesem Gedanken befassen. Stattdessen verteile ich ein Arbeitsblatt, auf welchem eine Vielzahl der ausliegenden Formen abgedruckt ist und erläutere den Arbeitsauftrag für die nächste Phase: An den Gruppentischen soll nun nach einer solchen Ur-Form, aus der sich alle Formen ableiten lassen, gesucht werden. Weißes Papier ist ausreichend vorhanden, als Hilfsmittel stehen Zirkel und Buntstifte (und natürlich Phantasie) zur Verfügung. Die Gruppenzugehörigkeit eines Schülers definiert sich dabei über die Farbe des Bandes, mit welchem die Briefrolle verschlossen war.

Die Schüler wechseln an die Gruppentische und machen sich an die Arbeit. Schnell sehe ich bei vielen Gruppen die richtige Lösung. Ich bekräftige sie in ihrer Arbeit und fordere sie auf, ihre Zeichnungen möglichst bunt und kreativ auszugestalten. Arianne hatte ebenfalls nach nur wenigen Minuten eine Zirkelrose auf dem Papier. Jetzt steht sie am Pult und blättert in HAECKELS „Kunstformen der Natur" – sie wolle sich ein paar Anregungen zur Ausgestaltung ihrer Zeichnung holen, erläutert sie mir lächelnd. Ich bitte Hanna, ihre Lösung mit dem großen Zirkel an die Tafel zu zeichnen und ihre Vorgehensweise den Mitschülern zu erläutern.

Abb. 27: Auf dem Weg zur Zirkelrose, der Grundfigur aller betrachteten Formen.

Jetzt sind alle auf dem gleichen Stand und übernehmen die Zeichnung von der Tafel. 45 intensive Minuten – die Pause ist wohlverdient.

Abb. 28: Zurück im Stuhlkreis. Die Abbildungen liegen noch auf dem Boden, deren Gemeinsamkeit – die Zirkelrose – strahlt von der Tafel, die individuellen Schülerprodukte selbst halten alle in der Hand.

Nach der kurzen Erholung bitte ich die Schüler, sich zusammen mit ihrer angefertigten Zeichnung wieder in den Stuhlkreis zu setzen. Wir betrachten die angefertigten Bilder. Während die meisten Mädchen wert auf eine möglichst bunte Zirkelrose gelegt haben, haben sich einige Mädchen und alle Jungs eher damit beschäftigt, das gesamte Blatt zu parkettieren. Auch Ada hat sich an einer Parkettierung versucht, allerdings gehen ihre Kreise ab der zweiten Reihe deutlich auseinander, so dass zum Teil recht große Lücken entstehen. Ich freue mich darüber und möchte die Gelegenheit nutzen, auf die Genauigkeit der Zirkelrosen zu sprechen zu kommen. Doch Ada versteckt ihre Zeichnung auffallend, offenbar sind ihr diese Ungenauigkeiten unangenehm. Ich frage die Jungs, ob bei ihnen auch in der zweiten und dritten Reihe Ungenauigkeiten auftreten. Noah behauptet „nein“, doch bei genauerem Hinsehen findet auch er kleinere Lücken. „Woher kommen diese Ungenauigkeiten?“ frage ich zunächst offen. Jen meint, man habe nicht genau genug gearbeitet. Aber wenn man sich mehr Mühe gäbe, könnte man es genau schaffen. Da alle dieser Meinung zu sein scheinen frage ich provozierend: „Könnte es nicht auch sein, dass man es gar nicht genau schaffen kann? Dass es nur Zufall ist, dass es bei Euch scheinbar hinkommt und dass es eigentlich zwangsläufig zu Ungenauigkeiten kommen muss?“ Meine Frage trifft, eine Diskussion beginnt, in der Rosanna und Michelle die Führungsrollen übernehmen. Nachdem einige Argumente ausgetauscht wurden bringe ich die Perfektion der Zirkelrose ins Spiel: „Also welche dieser Zirkelrosen ist nun perfekt?“ Maida und Nives intervenieren, dass Perfektion etwas Subjektives sei. „Was für mich perfekt ist, muss für jemand anderes noch lange nicht perfekt sein“, sagt Nives. Ich stimme zu und konkretisiere, dass ich in diesem Fall mit perfekt „hundertprozentig genau, ohne jegliche Abweichungen“ meine. Maida erkennt sofort, dass diese Frage so nicht zu klären ist: „Die Stifte, mit denen wir gezeichnet haben, sind viel zu dick.“ Und Rosanna, die in der Diskussion förmlich aufblüht, fragt: „Kann es in dem Sinn denn überhaupt irgendetwas Perfektes geben?“

Abb. 29: Intensive Diskussion: „Was ist schon perfekt?“

Ich kommentiere diese Frage nicht weiter, denn sie ist ein wunderbarer Einstieg in den Sokratischen Dialog (vgl. Anhang C), den ich verteile und den wir gemeinsam lesen. Roberto übernimmt dabei die Rolle des SOKRATES, Jen liest HIPPOKRATES und Maida mimt die Erzählerin. Der Dialog ist schwer und mit zwei Seiten nicht gerade kurz, doch das von mir erwartete tiefe, erleichterte Durchatmen nach Beendigung des Dialogs bleibt zu meiner Überraschung aus. Stattdessen beginnt die Diskussion von neuem, denn Rosanna sieht sich in ihrer anfänglichen Haltung bestätigt. Wir tragen noch einmal unsere Argumente zusammen und beziehen sie konkret auf den Dialog. Abschließend fasse ich das Ergebnis unserer tiefgründigen, intensiven und philosophischen Diskussion zusammen, in dem ich den letzten Absatz (HIPPOKRATES: „(...) Es liegt geradezu daran, dass die Gegenstände nicht wirklich, sondern nur in dem Maße als die Mathematiker sie denken, existieren, dass wir die ganze Wahrheit über sie herausbringen können. Es liegt daran, dass sie genau das sind, was man von ihnen denkt. Im Gegensatz zu den Dingen, die in Wirklichkeit vorkommen. Diese unterscheiden sich von dem Bild, das man sich von ihnen gemacht hat.") zitiere und ergänze, dass perfekte Kreise, Dreiecke, Quadrate oder eben auch Zirkelrosen niemals auf dem Papier existieren können. Immer gibt es Abweichungen, Perfektion gibt es nur in unseren Gedanken. Aber: „Jeder Kreis, den wir zeichnen, ist ein Repräsentant des perfekten Kreises, den wir meinen." Nach diesem gewichtigen Schlusswort schließe ich die äußerst intensive und gehaltvolle Stunde. Die verbleibenden drei Minuten reichen gerade noch aus, um die Infotexte zu BENTLEY und HAECKEL zu verteilen, die Hausaufgabe zu erläutern – die beiden Texte sollen gelesen und knapp zusammengefasst werden – und den Raum wieder herzurichten.

I. Akt (Fr., 16.03.2012, 3./4. Lektion)

Zwei Tage nach der Ouvertüre des Lehrstücks befinden wir uns wieder im normalen Unterrichtsrhythmus. Ich gebe den Schülern zu Beginn der Doppelstunde eine kurze Rückmeldung zur vorhergehenden Stunde und betone mit einem großen Lob, dass es in meinen Augen eine hervorragende Stunde war – trotz der ungünstigen Uhrzeit und der zahlreichen Besucher. Die Schüler bekräftigen zu meiner Freude, dass es auch für sie eine intensive und spannende Stunde gewesen sei und ihnen darüber hinaus die Anwesenheit der Besucher nichts ausgemacht habe.
Ich kündige an, dass wir auch in dieser Stunde Besuch erwarten, diesmal jedoch nur eine Person. Leider sei diese aber bisher nicht aufgetaucht, ich werde also zwischendurch einmal kurz den Raum verlassen müssen, um unseren Besuch am Lehrerzimmer abzuholen. Um wen es sich handelt, verrate ich noch nicht. Bis dahin besprechen wir die Hausaufgaben. Jeweils zwei Zusammenfassungen der Texte zu Ernst HAECKEL und Wilson BENTLEY werden vorgetragen, kleinere Ungenauigkeiten werden besprochen und korrigiert. Nach rund 15 Minuten verlasse ich das Klassenzimmer, um den angekündigten Besuch abzuholen. Ich schließe die Tür hinter mir und werfe mir einen großen, weißen Schal, welchen ich bereits vor der Stunde vor der Tür deponiert hatte, wie eine Chlamys um die Schultern. Einen kurzen Augenblick warte ich, bevor ich wieder den Klassenraum betrete. Die Schüler sehen mich erstaunt an, „ist das der Besuch?" fragt jemand. Ich beantworte die Frage nicht, sondern stelle mich höflich vor.

Abb. 30: EUKLID in einer früheren Inszenierung (am Alten Gymnasium Oldenburg, 2010; vgl. GERWIG 2011).

„Mein Name ist EUKLID von Alexandria. Ich grüße Euch herzlich! Ich freue mich, nach meiner langen Reise endlich hier bei Euch zu sein. Ich komme aus einer frühen Zeit zu Euch: Geboren wurde ich zwar im antiken Griechenland, rund 300 Jahre vor dem Beginn Eurer Zeitrechnung, doch schon seit vielen Jahren lebe und lehre ich in Alexandria, der pulsierenden Metropole an der ägyptischen Mittelmeerküste. Dort bin ich ein hoch angesehener Mann – manche nennen mich sogar einen Meister auf dem wahrlich ehrwürdigen Gebiet der Mathematik. Mit großem Interesse beschäftige ich mich mit der Geometrie, der Mathematik der Formen. Ist es nicht toll, welch schöne Figuren sich allein mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen? Wie ich sehe, habt auch Ihr Euch bereits auf diesem Gebiet versucht. Ich sehe in Euren Heften wahrlich schöne und farbenfrohe Kunstwerke. Spannt mich nicht weiter auf die Folter und erklärt mir schon: Um was handelt es sich bei diesen prächtigen Bildnissen?“ Der Auftritt kommt an, die Schüler berichten mir, wie sie die Zirkelrosen entdeckt und konstruiert haben. Auch beziehen sie sich auf den Sokratischen Dialog, indem sie erklären, dass die meisten Figuren zwar perfekt aussehen, in Wahrheit aber nicht perfekt seien. „Das habt Ihr gut erkannt! Wahre Perfektion gibt es nur in Gedanken, niemals auf dem Papier. Dennoch würde ich gerne wissen: Sind die Ungenauigkeiten, von denen Ihr sprecht, tatsächlich allein auf Fehler und praktische Unzulänglichkeiten in der Konstruktion zurückzuführen, oder ist es selbst in Gedanken nicht möglich, eine perfekte Zirkelrose zu konstruieren, weil es immer eine gewisse Ungenauigkeit gibt, geben *muss*?“ Rosanna, die bereits während der Ouvertüre die Diskussion um die Perfektion geometrischer Objekte angeführt hatte, übernimmt auch jetzt wieder eine Führungsrolle und betont noch einmal den Unterschied zwischen einer gezeichneten und gedachten Zirkelrose. „Dennoch würde ich gerne wissen, ob die gedachten Zirkelrosen wirklich perfekt sind, oder ob es am Ende immer eine, wenn auch nur sehr geringe Ungenauigkeit gibt. Doch ihr habt vollkommen Recht, mit einer Zeichnung können wir diese Frage nicht beantworten. Ihr müsst einen anderen Weg beschreiten: Wenn ihr begründen könntet, *warum* sich die Zirkelrose am Ende schließen *muss*, hättet ihr die Frage nach der Genauigkeit gleich mit beantwortet.“ Das ging schnell, vielleicht ein wenig zu schnell. Immerhin hat die Menschheit 2000 Jahre gebraucht, um die Genauigkeitsfrage durch die Ursachenfrage abzulösen. Ein gewaltiger gedanklicher Schritt, der hier von den Schülern mitvollzogen werden soll. Also versuche ich deutlicher zu werden: „Liebe Strahlentierchen und Kofferfische, liebe Schneeflocken: Was Ihr macht ist wahrlich fantastisch! Ihr seid hervorragende Konstrukteure vielfältiger geometrischer Formen. Und Ihr, liebe Schüler, Ihr habt mit der Zirkelrose ja sogar die Urform, die geometrisch einwandfreie Konstruktion eines Sechsecks gefunden. Eure Konstruktionen sind ganz hervorragend. Dennoch: Ihr könnt nicht mit absoluter Sicherheit wissen, ob das, was Ihr macht, wirklich exakt ist. Aber wollt Ihr nicht genau das wissen? Und wollt Ihr auch wissen, *warum* es passt – warum es immer passen *muss*? Ich möchte Euch ein Tor öffnen, ein Tor in die Tiefe der Mathematik und der Wissenschaft im Allgemeinen: Ich möchte mit Euch die Dimension des ‚Warum' erforschen. Warum kann man auf diese Weise ein Sechseck konstruieren? Warum schließt sich jede Zirkelrose am Ende? Diese Frage ist eine wahrlich spannende, und sie zu beantworten wird nicht einfach werden. Aber ich bin vollkommen sicher, dass Ihr es schaffen könnt. Lasst mich Euch noch einen Tipp mit auf den Weg geben: Phänomene und Ereignisse lassen sich auch ohne Aufrufung der Götter erklären – viele meiner Zeitgenossen waren dessen ungläubig und es hat mich viel Mühe gekostet, sie zu überzeugen. Doch sie alle stimmen mir heute zu. Es ist keine Magie, sondern reine Logik, die Euch bei der Suche nach der Antwort auf die Ursachenfrage hilft. Ihr werdet hart arbeiten müssen. Und die Erforschung eines so spannenden Phänomens, wie Ihr es hier aufgedeckt habt, geht nicht von jetzt auf gleich. Oft sind mehrere Schritte notwendig, die Ihr nacheinander durchdenken müsst. Arbeitet gemeinsam und seid geduldig. Dann werdet Ihr am Ende sicherlich für Eure Mühen belohnt.“ Ich bedanke mich für die Aufmerksamkeit, verbeuge mich ein wenig und verlasse den Raum wieder. Vor der Tür lege ich meinen weißen Umhang wieder ab, warte einige Sekunden und betrete wieder den Raum. „Leider konnte ich unseren angekündigten Besuch nicht finden“, erkläre ich mit einem zwinkernden Auge. „Der war schon hier“, rufen mir zeitgleich einige Schüler entgegen. Die Klasse ist ein wenig aufgebracht, so dass ich zunächst versuche, sie wieder zu beruhigen. Anschließend lasse ich mir erklären, was ich verpasst habe – bereitwillig berichten alle davon.

Ich bitte Kai noch einmal eine Zirkelrose an die Tafel zu zeichnen, anhand derer wir das zuvor besprochene vertiefen. Als Ergebnis der zurückliegenden Diskussion und als Suchrichtung für die kommenden Stunden fixieren wir daneben unsere Leitfrage: „Warum schließt sich die Zirkelrose ganz genau?“. Ich betone, dass wir diese Frage auch mathematisch formulieren können. Ich bitte Ramona zu erläutern, was man unter dem Radius eines

Kreises versteht und den Radius des zentralen Kreises der Zirkelrose an der Tafel zu zeigen. Anschließend bitte ich sie, den Radius eines äußeren Kreises zu zeigen und diesen einzuzeichnen. Nach kurzem Überlegen stellt sie fest, dass es dazu unendlich viele Möglichkeiten gibt. Zeichnen wir aber jeweils den Radius zum Mittelpunkt eines benachbarten Kreises, so stellen wir fest, dass die Radien der äußeren Kreise zusammen ein Sechseck bilden. Implizit geahnt hatten wir das schon zuvor, immerhin lassen sich genau sechs Kreise um den mittleren Kreis herum anordnen. Nun aber haben wir das Sechseck erstmals als ein solches vor Augen. Da nun alle zur Zirkelrose gehörenden Kreise den gleichen Radius haben, können wir unsere Warum-Frage mathematisch formulieren: „Warum lässt sich der Radius eines beliebigen Kreises genau sechsmal auf dem Rand des Kreises abtragen?“
An dieser Stelle haben wir ein wichtiges Zwischenziel erreicht. Wir haben ein rätselhaftes Phänomen aus natur- und kulturgegebenen Formen herausgelesen, es in all seinen Facetten betrachtet und nun in eine mathematische Formulierung übersetzt. Das Phänomen selbst zeigt sich uns nun in einem neuen Licht: Wir staunen jetzt nicht mehr darüber, *dass* es so ist, *dass* sich die Zirkelrose schließt, *dass* sich der Radius eines Kreises genau sechsmal in der Peripherie herumspannen lässt, sondern jetzt wollen wir mehr, wir wollen erfahren, *warum* es so ist.
Wie können wir diese Frage klären? Ich erläutere, dass wir vor einem (mathematischen) Problem stehen. Wir haben ein rätselhaftes Phänomen entdeckt und suchen nun nach einer Begründung. „Lösen wir uns zunächst einmal vom konkreten mathematischen Inhalt und betrachten die Situation, in der wir uns jetzt befinden. Allgemein: Welche Strategien kann man anwenden, um ein Problem zu lösen?“ Wieder beginnt eine Diskussion, so dass ich den Schülern einige Minuten Zeit gebe, um sich auszutauschen. In der anschließenden Plenumsphase übernehme ich den Part des Moderators. Es kristallisieren sich vor allem die Punkte „sich Hilfe holen“, „das Problem mit anderen besprechen“, „alles genau aufschreiben“, „nur benutzen, was man sicher weiß, was selbstverständlich ist“ heraus, welche an der Tafel fixiert werden. „Eine wichtige Strategie habt Ihr noch vergessen“, ermuntere ich die Schüler zum weiterdenken. „Was ist, wenn das Problem überaus kompliziert ist?“ Melina lächelt „dann gebe ich auf, oder ich hole mir Hilfe“ – diesen Punkt haben wir allerdings schon genannt, und aufgeben ist natürlich keine wirkliche Alternative. Da niemand auf die Idee kommt, Unwichtiges nicht zu betrachten und das Problem so zu vereinfachen, nenne ich diesen Punkt – neu ist diese Strategie der Problemlösung für die Schüler nicht. Dabei weise ich gleichzeitig auf die Gefahr hin, das Problem durch eine Vereinfachung möglicherweise zu verändern. „Nach jeder Vereinfachung muss man überprüfen, ob das Problem wirklich noch dasselbe ist“, betone ich und fixiere diesen Punkt als vierte und letzte Strategie an der Tafel.

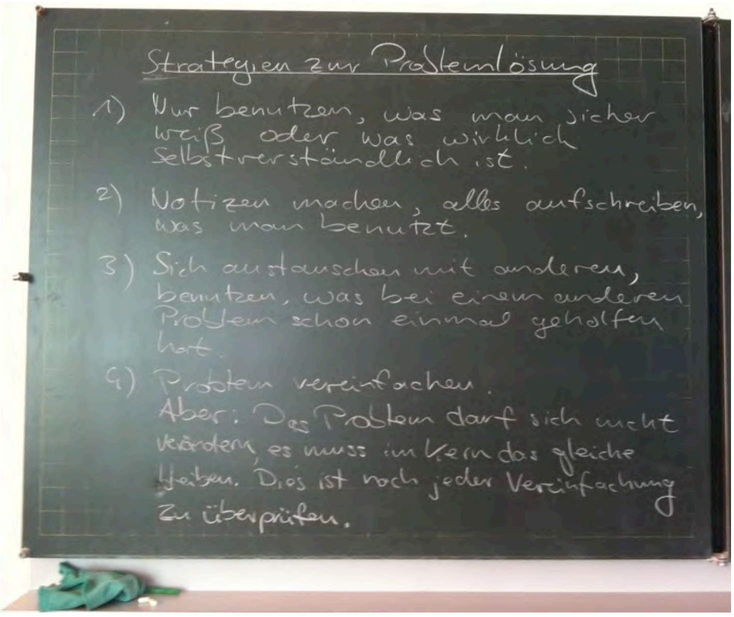

Abb. 31: Von den Schülern im Gespräch entwickelte Strategien zur Lösung eines Problems – Orientierungslinie für die nächsten Schritte.

Nun also zurück zur Mathematik: Wir wissen genau wo wir stehen, kennen das Problem und haben einige konkrete Strategien, um es zu lösen. Ich bitte die Schüler, die Strategien von der Tafel in ihr Heft zu übernehmen und beende die Stunde.

II. Akt (Mi., 21.03.2012, 5./6. Lektion)

Da ich mir noch nicht gänzlich sicher bin, ob alle Schüler das entdeckte Phänomen tatsächlich als ein solches vor Augen haben, möchte ich zu Beginn der Stunde noch einmal deutlich machen, dass es sich dabei tatsächlich um eine fragwürdige Entdeckung handelt. Dazu greife ich auf einen Tipp von WAGENSCHEIN zurück: „Nützlich ist der Vergleich mit der anderen Frage, wie viel mal der Radius (als Seilstück) außen herum*gebogen* werden kann?“ (WAGENSCHEIN 2008, 136; Hervorhebung im Original).
Ich zeichne also zu Beginn der Stunde einen großen Kreis an die Tafel und schneide ein Stück Seil in der Größe des Radius von einer größeren Rolle ab. Anschließend bitte ich Melina und Ramona am Kreis und mithilfe des Seils zu zeigen, was wir entdeckt haben. Beide gehen an die Tafel, besprechen sich kurz und tragen das Seil dann sechsmal auf dem Rand ab, wobei sie nach jeder Teilmessung jeweils einen Strich machen, wodurch eine „Wimpernfigur“ entsteht. „Das wussten wir doch schon“, sagt Luna, die eine sehr hohe Auffassungsgabe und ein großes Verständnis für mathematische Sachverhalte hat, etwas gelangweilt. Ich denke an WAGENSCHEIN („Erst die langsamen, dann die Schnellen“) und bestätige: „Richtig, das ist genau das, was wir in den letzten Stunden beobachtet haben, der Radius des Kreises lässt sich offenbar sechsmal in der Peripherie herumspannen. Nun: Wie oft kann man denn den Radius auf dem Kreis herumbiegen?“ – „Siebenmal“, „achtmal“, „zehnmal“ rufen einige in den Raum. Da Melina und Ramona noch immer vorne stehen und Melina das Seilstück immer noch in der Hand hält bitte ich die beiden, dies zu überprüfen. Das Herumbiegen des Seils auf dem Kreisrand ist an der senkrechten Tafel ist jedoch nicht so einfach, hier braucht es tatsächlich vier Hände. Wieder machen sie Striche an den entsprechenden Stellen und am Ende stellen wir gemeinsam fest, dass man den Radius etwas mehr als sechsmal, aber sicherlich weniger als sieben mal außen herumbiegen kann (da der Kreisumfang mit $U = 2\pi r$ berechnet wird, lässt sich der Radius genau 2π-mal, d. h. ungefähr 6,3-mal außen herumbiegen). Diese Erkenntnis führt bei einigen nun zu Erstaunen und ich versuche, dies zu verdeutlichen. Denn es ist also in der Tat etwas Besonderes, dass sich der Radius offenbar *genau*, nicht ungefähr sechsmal auf dem Rand abtragen lässt. Es könnte ja genau so gut auch anders sein, etwas mehr oder etwas weniger als sechsmal. Aber es geht *genau* sechsmal, der letzte der sechs äußeren Kreise der Zirkelrose verläuft *genau*, exakt durch den Mittelpunkt des ersten äußeren Kreises. Mir scheint, dass dieser Vergleich hilfreich war, das Phänomen jetzt noch mehr geklärt und auf Seiten der Schüler noch präsenter und rätselhafter ist.
Jetzt steigen wir also endlich ein in die Suche nach einer Begründung – von einem „Beweis“ ist an dieser Stelle des Unterrichts noch keine Rede. Eine Folie mit den abfotografierten Problemlösestrategien der Schüler macht diese wieder für alle sichtbar, so dass es jetzt also losgehen kann.
An die linke Tafelhälfte zeichne ich noch einmal sauber die Wimpernfigur und das zugehörige Sechseck, was Melina und Ramona zuvor schon einmal konstruiert hatten. Auf der rechten Tafelhälfte notiere ich unsere Leitfrage, den Rest lasse ich frei für Kommentare und Erläuterungen zu den einzelnen Schritten. Ich erkläre, dass wir immer von der Skizze ausgehen sollten, das zu klärende Problem dabei aber nicht aus den Augen verlieren dürfen. Mit einem Blick auf die Folie weise ich auf die erste Strategie hin und sage „wir sollten alles benutzen, was wir sicher kennen, und all das sollte nach Möglichkeit auch in der Figur sichtbar sein. Alles was wir haben, ist ein Kreis. Aber damit ist eine bestimmte Größe direkt verbunden.“ Amon weist darauf hin, dass die Größe eines Kreises abhängig ist von seinem Radius, „kennt man den Kreis, kennt man den Radius“ fasst er knapp zusammen. Ich beharre darauf, diesen dann doch auch einzuzeichnen – die Frage ist nur wo, schließlich gibt es auf dem Rand unendlich viele Punkte, die wir mit dem Mittelpunkt verbinden könnten. Unter diesen unendlich vielen gibt es aber sechs besondere: Die Schnittpunkte mit den ehemaligen Kreisen, die Wimpern. Also verbinden wir diese Schnittpunkte mit dem Mittelpunkt. „Ist das Problem damit gelöst?“ frage ich leicht suggestiv. Nachdenklich schütteln die meisten Schüler den Kopf. Das ist offenbar noch nicht die Lösung. Also ma-

chen wir den nächsten Schritt: Welche Strategie könnte jetzt helfen? „Wir haben alles eingezeichnet, was wir kennen, wir machen uns Notizen – vielleicht könnten wir versuchen, dass Problem zu vereinfachen, in dem wir etwas Überflüssiges wegwischen“, schlage ich vor. Ich lasse die Schüler kurz diskutieren, was ihrer Meinung nach an der Figur überflüssig ist. Schließlich kommen sie zu dem Ergebnis, dass es, sofern es überhaupt etwas Überflüssiges gibt, der Kreis sein muss, denn alles andere haben wir ja gerade erst eingezeichnet und es wäre unsinnig, davon jetzt schon wieder etwas auszulöschen. Also entfernen wir den Kreis. Damit sind wir an einer spannenden Stelle: Das Problem muss neu formuliert werden. Ich lese noch einmal unsere anfängliche Leitfrage vor und weise darauf hin, dass in dieser von einem Kreis die Rede ist und dass wir diesen Kreis aber gerade entfernt haben. „Also müssen wir die Leitfrage irgendwie so umformulieren, dass sie zu unserer neuen Skizze passt. Es darf darin kein Kreis mehr auftauchen, das Problem muss im Kern aber noch immer dasselbe sein.“ Meine Argumentation ist verständlich, doch das Umformulieren der Ausgangsfrage ist hoch anspruchsvoll. Ich bitte die Schüler, dies zunächst in einer zweiminütigen Ich-Phase zu probieren und ihre Ergebnisse in der anschließenden, ebenfalls zweiminütigen Du-Phase mit ihrem Sitznachbarn zu besprechen. Die folgende Wir-Phase zeigt schließlich, dass durchaus einige richtige Ansätze vorhanden sind, doch erst mit meiner Hilfe gelangen wir zur Formulierung „Lassen sich sechs gleichseitige Dreiecke rundherum lückenlos zusammen schieben?“ Wir notieren das so umformulierte Problem an der Tafel und konkretisieren mithilfe der entsprechenden Zeichnung: „Passt ein sechstes Dreieck in die Lücke?“

Doch wie können wir nun dieses neue Problem lösen? Niemand hat eine Idee. Also ziehe ich einen Beutel mit gleichseitigen Holzdreiecken aus meiner Tasche. „Ausprobieren!“ sage ich und verteile die Dreiecke unter den Schülern. Doch schon nach einer Minute kommt aus mehreren Ecken die Feststellung, dass diese zu grob, zu ungenau gesägt seien. „Die Dreiecke sind ja ohnehin nur ungefähr gleichseitig, wirklich perfekt können sie nie sein“, argumentiert Maida mit einem selbstbewussten Lächeln. Ich fühle mich, als hätte man mich mit meinen eigenen Waffen geschlagen. Natürlich! Nach dem Lesen des Sokratischen Dialogs und der ausführlichen Diskussion über die Idealität geometrischer Figuren in der Ouvertüre ist es jetzt alles andere als logisch, die Frage, ob sich sechs gleichseitige Dreiecke lückenlos rundherum zusammenschieben lassen, *praktisch* überprüfen zu wollen. Ich nutze die Gelegenheit und greife den Sokratischen Dialog noch einmal auf. Fazit: Praktisch können wir die Frage nicht beantworten, wir müssen auf theoretischer Ebene weiterdenken.

„Wir befolgen alle unsere formulierten Strategien: Wir haben das Problem vereinfacht, wir schreiben alles auf, wir tauschen uns untereinander aus, wir benutzen nur Selbstverständliches – und trotzdem kommen wir im Moment nicht weiter“, resümiere ich leicht resigniert. „Können wir das Problem vielleicht noch einmal vereinfachen?“ Ich merke, dass einige der Schüler bereits müde werden, es scheint ihnen zu lange zu dauern. Vermutlich haben sie, wenn überhaupt, nur selten zuvor so lange an einer einzigen Sache gegrübelt, werden Probleme für gewöhnlich doch eher so formuliert, dass die Schüler selbst schnell zu einer Lösung kommen können oder – sollte das nicht funktionieren – ihnen zumindest eine solche präsentiert werden kann. Um die Schüler für die letzten Minuten der ersten Stunde zu motivieren, gehe ich auf genau diese Thematik ein. „EUKLID hat gesagt, dass es anstrengend wird. Es gibt hierbei keine fertige Lösung nach wenigen Minuten. Wenigstens ein einziges Mal wollen wir selber durch eigenes Nachdenken und selbstständiges Suchen die Lösung finden. Umwege gehören dazu, und vor allem müssen wir mehrere Schritte machen“, versuche ich sie zu motivieren. Doch viele haben eine kurze Pause nötig, also ziehen wir diese fünf Minuten vor.

„Wir haben es fast geschafft, das Ziel ist nah“, beginne ich die zweite Hälfte der Doppelstunde. „Eine weitere Vereinfachung wird uns helfen.“ Da niemand eine Idee hat und ich das Gefühl habe, dass Ich- und Du-Phase in dieser Situation eher demotivierend wirken könnten – was auf meine Nachfrage hin von den Schülern bestätigt wird, fast alle wünschen sich eine konkrete Hilfestellung meinerseits – gehe ich zur Tafel und wische kommentarlos das halbe Sechseck brutal aus: Entsetzen bei den Schülern. „Ich behaupte, dass durch Halbieren der Figur das Problem vereinfacht, im Kern aber nicht verändert wird." Ich weise auf unsere letzte Strategie hin: „Dazu müssen wir das Problem allerdings erneut umformulieren." Jetzt starte ich die zuvor ausgefallene Ich- bzw. Du-Phase. Mit Erfolg: Die Umformulierung des Problems klappt diesmal deutlich schneller. Sie ist allerdings auch leichter, bleiben wir jetzt doch in der Sprache der Dreiecke, so dass die neue Formulierung der alten sehr viel mehr ähnelt, als dies bei der ersten Vereinfachung (bei der Entfernung des Kreises) der Fall war. Luna hat den ersten Vorschlag: „Lassen sich drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander zusammenschieben?" Sofort interveniert Arianne: „Das geht doch immer." Ich bestätige das und weise darauf hin, dass bei Lunas Formulierung nur eine Kleinigkeit fehlt. Sie korrigiert es selbst: „Lassen sich drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander an einer Geraden zusammenschieben?". Wunderbar, diese Formulierung übernehmen wir und ergänzen in Anlehnung an den vorhergehenden Schritt: „Passt ein drittes Dreieck in die Lücke?"

Wir sind fast am Ziel. Ich nehme ein paar Holzdreiecke in die Hand und behaupte, dass sich die von Luna formulierte Frage doch damit ganz leicht beantworten lasse. Doch meine Aussage erntet – zu meiner Freude – nur ein gelangweiltes Stöhnen: „Wir wissen doch, dass die Dreiecke nur ungefähr gleichseitig sind. Wir bräuchten aber exakt gleichseitige Dreiecke, die es aber nur in unseren Gedanken gibt", erläutert Jessy, „also können wir die Frage mit den Dreiecken nicht beantworten", ergänzt Ada. Eine solche Argumentation hatte ich erhofft! „Bleiben wir also bei unserer Zeichnung an der Tafel", sage ich und kündige an, dass ich für den nächsten Schritt eine Hilfe vorbereitet hätte. Aus meiner Tasche ziehe ich ein gleichseitiges Pappdreieck, welches ich extra für diesen Schritt angefertigt habe. Auf einer Seite ist das Dreieck mit Styropor beklebt, in welches wiederum fünf Löcher eingearbeitet wurden. In jedem dieser Löcher steckt ein Stück farbige Kreide (vgl. Abb. 32).

Abb. 32: Hilfsmittel für die entscheidende, wortlos an der Tafel vorgeführte Dreiecksverschiebung.

Ich fasse noch einmal zusammen, wo wir gerade stehen. „Wir haben unser Ausgangsproblem Schritt für Schritt vereinfacht bis zu der folgenden Fragestellung: Lassen sich drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander an einer Geraden anlegen? Oder anders: Wenn zwei Dreiecke nebeneinander an einer Geraden anliegen, passt dann ein drittes Dreieck in die Lücke?" Ich erläutere anhand der entsprechenden Skizze, dass wir die beiden nebeneinander anliegenden Dreiecke jetzt nicht mehr als zwei verschiedene Dreiecke, sondern als ein Dreieck in zwei unterschiedlichen Positionen betrachten und dieses Dreieck nun aus der ersten in die zweite Position verschieben wollen. „Diese Verschiebung werde ich Euch kommentarlos mithilfe des Spezialdreiecks vorführen." Ich versuche die Schüler weiter zu motivieren, dass mithilfe dieser Dreiecksverschiebung unsere Fragestellung unmittelbar zu beantworten ist. Deshalb soll im direkten Anschluss jeweils eine 2-minütige Ich- und Du-Phase beginnen, in welcher die Schüler intensiv miteinander um die Antwort ringen können. Die Schüler sind einverstanden mit diesem Vorgehen, die Konzentration ist in dieser Phase unheimlich hoch, eine neugierige Anspannung liegt in der Luft.

Ich gehe zur Tafel und verschiebe kommentarlos das Dreieck langsam und für alle sichtbar aus der ersten in die zweite Position. Bei der Verschiebung entstehen fünf farbige, zur Grundlinie und untereinander parallele und gleich lange Linien (vgl. Abb. 33). Ich lege das Dreieck auf das Pult und beobachte die Schüler. Noch immer ist es sehr ruhig in der Klasse, alle blicken konzentriert zur Tafel. Nach rund einer halben Minute ist Melina die erste, die ein verstehendes „Ah!" ausruft, ihr folgen Maida und Nives. Ich erkundige mich bei ihnen, leise teilen sie mir ihre Idee mit. Da diese stimmt bitte ich Melina, der Klasse eine weitere Hilfe zu geben, wobei sie allerdings nicht sprechen darf. Sie überlegt kurz, nimmt das Dreieck vom Pult und hält es mit einer Seite nacheinander an alle farbigen Linien auf der Tafel. Damit verdeutlicht sie, dass diese offenbar alle die gleiche Länge haben, nämlich die Länge einer Dreiecksseite.

Ich erinnere ich an den Phasenwechsel, die Du-Phase beginnt. An immer mehr Stellen höre ich freudige Ausrufe der Erkenntnis und in der anschließenden Plenums-Phase lasse ich zunächst Hanna, die neben Melina sitzt und während der Du-Phase mit ihr deren Lösung diskutiert hat, ihre Idee vortragen. Sie beschreibt zunächst: „Bei der Verschiebung sind farbige Linien entstanden, die alle gleich lang sind. Deshalb muss ein weiteres Dreieck in die Lücke passen.“ Ich kommentiere, dass ihre Beobachtung richtig und sie auf einem guten Weg ist, dass jedoch noch Argumente fehlen. „Ihr solltet die Länge der Linien in Eure Argumentation einbauen“, helfe ich. Maida: „Alle Linien sind gleich lang.“ Ich bitte sie, ihre Aussage zu konkretisieren: „Wie lang genau?“ – „So lang wie eine Seite des Dreiecks.“ Ich nehme das Dreieck vom Pult und halte es, wie Melina zuvor, nacheinander an die farbigen Linien – tatsächlich, die Linienlängen entsprechen anscheinend einer Dreiecksseite. Das muss auch so sein, denn genau um diese Länge ist das Dreieck ja verschoben worden. „Diese Linien geben also an, welche Strecke ein Punkt des Dreiecks bei der Verschiebung zurückgelegt hat. Für welche Punkte des Dreiecks gilt das?“ Noah erkennt sofort die Verallgemeinerung: „Natürlich für alle Punkte, die Kreidestücke könnten ja überall im Dreieck stecken.“ Nives verkündet stolz, dass sie die Lösung gefunden habe – sofort beginnt sie zu reden: „Zwischen allen Punkten der Dreiecke liegt der gleiche Abstand, d. h. auch zwischen den Spitzen der Dreiecke. Und da der Abstand genau einer Seitenlänge des Dreiecks entspricht, muss ein drittes Dreieck in die Lücke passen.“ Ihre Augen strahlen, während sie das sagt. Sie weiß, fühlt genau, dass ihre Argumentation schlüssig ist. Ich signalisiere ihr, dass diese nicht nur schlüssig, sondern auch einwandfrei formuliert ist, stelle aber beim Blick in die Klasse fest, dass ihr nicht alle folgen konnten. So bitte ich Nives, ihre Argumentation langsam und an der Tafel mithilfe der Skizze zu wiederholen, was sie bereitwillig tut. Langsam scheint sich die Erkenntnis durchzusetzen, eine spontane, kurze Murmelphase sorgt für weitere Klärung. Melina fasst die Begründung anschließend an der Tafel noch einmal zusammen und beantwortet gemeinsam mit Nives exzellent einige Rückfragen. Mit dieser wuchtigen Erkenntnis beende ich die Stunde und bitte die Schüler, zu Hause diesen letzten Schritt ausgehend von der Problemfrage zu verschriftlichen.

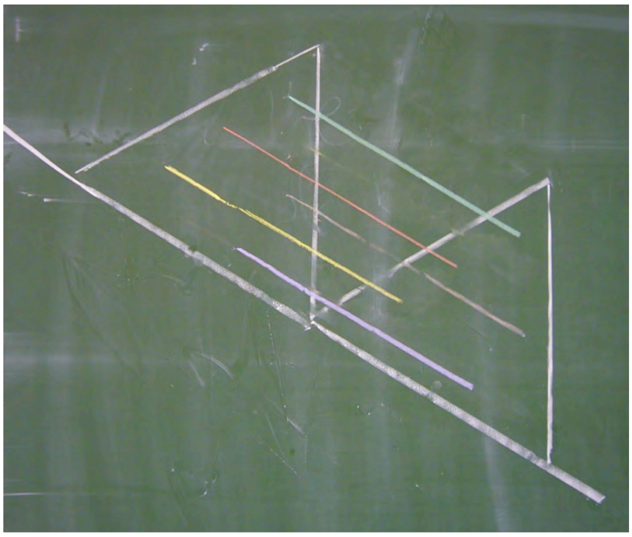

Abb. 33: Bei der Verschiebung des Dreiecks entstehen gerade, gleich lange, parallele Linien. Mit dieser Erkenntnis ist die Formulierung des entscheidenden Beweisschritts ganz nah.

III. Akt (Fr., 23.03.2012, 7./8. Lektion)

Ich beginne die Stunde, indem ich stumm einige DIN-A3-Poster an die Tafel hänge (vgl. Abb. 34). Auf jedem Poster ist die Skizze eines in der vorhergehenden Stunde entwickelten Beweisschrittes abgedruckt. Als alle Poster hängen stelle ich die Aufgabe, die einzelnen Schritte zu erläutern. Es entwickelt sich ein schönes Unterrichtsgespräch mit einer breiten Beteiligung und unter Zuhilfenahme der Aufzeichnungen aus der vorhergehenden Stunde haben wir nach nur 10 Minuten alle Schritte erläutert. Ich verrate, dass wir am Ziel sind. „Um uns das klar zu machen, ist es sinnvoll, unsere Begründung noch einmal zu durchlaufen, jetzt allerdings von hinten nach vorne.“ Arianne macht den Anfang und mit Amons Hilfe klärt sie die Erkenntnis des letzten Schritts, was wir an der Tafel fixieren. Nun also weiter: Warum kann man aus der an der Geraden anliegenden Dreiergruppe schließen, dass es auch einer solche Sechsergruppe geben muss? Hier würde das sechste EUKLIDische Axiom weiterhelfen („die Halben von demselben sind einander gleich"), doch das kennen die Schüler zu diesem Zeitpunkt noch nicht. Es ist aber auch nicht unbedingt notwendig, denn „das ist ja offensichtlich", behauptet Noah: „Das Sechseck besteht aus zwei Dreiergruppen. Wenn es also eine solche Dreiergruppe gibt, dann kann ich auch zwei von ihnen zusammenschieben zu einem Sechseck." Als wir das Sechseck im Verlaufe des Beweises halbiert hatten, war unsere Argumentation eine ganz ähnliche. Daran hatte sich Noah offenbar erinnert. Insgesamt ist daran nichts auszusetzen, also übernehmen wir diese Aussage an die Tafel. „Wie kommt nun der Kreis ins Spiel", frage ich. „Eine Gruppe von sechs gleichseitigen Dreiecken liegt vor uns, d. h. die von der Mitte nach außen laufenden Strecken haben alle die gleiche Länge", ergänze ich. Plötzlich sagt Arianne: „Natürlich muss es dann einen Kreis geben, der alle Ecken des Sechsecks berührt." Ich hake nach: „Welchen Radius hat denn dieser Kreis?" – „Eine Dreiecksseite", antwortet sie und ich konkretisiere: „Der Radius des Kreises entspricht der Länge einer Dreiecksseite", und schreibe diesen Satz an die Tafel. Damit sind wir fertig, denn wegen der Gleichseitigkeit der Dreiecke entspricht die außen liegende Seitenlänge ebenfalls dem Kreisradius. Dieser ist also offenbar sechsmal auf dem Rand des Kreises abgetragen. Den fertig formulierten Beweis übernehmen alle in ihr Heft.

Nachdem noch einige Nachfragen geklärt sind, kündige ich einen Betrachtungswechsel an: „Wir wollen uns jetzt etwas von dem konkreten Inhalt der Aussage lösen und mehr die Struktur unserer Begründung analysieren." Ich erinnere, dass wir ein anfängliches Problem Schritt für Schritt vereinfacht und dabei immer wieder überprüft haben, dass das Problem im Kern wirklich unverändert bleibt. „Bis – ja bis wohin?" Meine Frage scheint nicht klar genug formuliert zu sein, also versuche ich zu konkretisieren: „Im letzten Schritt unserer Begründung standen wir schon vor der dritten Formulierung unseres anfänglichen Problems. Diese Umformulierungen hatten uns bis dahin nicht sehr viel weitergeholfen und wir mussten wieder nach einer Vereinfachung suchen. Doch im letzten Schritt brauchten wir keine erneute Vereinfachung" – Maida führt unaufgefordert meinen Satz fort: „weil das Problem plötzlich so einfach war, das wir es direkt lösen konnten." Das möchte ich jetzt genauer wissen: Warum konnten wir das nicht vorher auch schon? Warum erst jetzt? Auf was haben wir die letzte Version des Problems denn zurückgeführt? Langsam setzt sich die Erkenntnis durch, dass wir die Frage, ob ein drittes gleichseitiges Dreieck zwischen zwei gleichseitige Dreiecke, die nebeneinander an einer Geraden anliegen, passt, auf die einfache Tatsache zurück geführt haben, dass man ein Dreieck in der Ebene verschieben kann.

„Unsere gesamte Begründung fußt also auf dieser einfachen Selbstverständlichkeit", fasse ich zusammen und eröffne den Schülern, dass man eine so aufgebaute Begründung in der Mathematik einen Beweis nennt. Ich berichte von der Mathematik der Ägypter und Babylonier und stelle heraus, dass EUKLID – den die Schüler ja bereits persönlich kennen – mit seinem Jahrtausendwerk „Die Elemente", welches ich präsentiere, einen bis heute nicht zu überschätzenden Beitrag für die Entwicklung der Mathematik geliefert hat. „EUKLID hat das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit zusammengetragen und in einer bis dahin ungeahnten Strenge bewiesen." Die Tatsache, dass es sich dabei um das nach der Bibel zweitmeist verkaufte Buch der Weltliteratur handelt und noch bis vor wenigen Jahrzehnten in England als Schulbuch eingesetzt wurde, erstaunt die Schüler. „Im vierten Buch der Elemente, heute würde man eher Kapitel sagen, finden wir exakt den Satz, den wir in den letzten Stunden entdeckt und bewiesen haben", berichte ich und lege eine Folie mit dem Originalbeweis EUKLIDs auf. Ich erläutere, dass EUKLID seine Beweise etwas anders aufgebaut hat, als wir es heute machen: Er beginnt mit einer Aufgabenstellung, liefert dann die Lösung dazu und beweist anschließend, dass seine Lösung tatsächlich stimmt.

Wir gehen zunächst die Aufgabenstellung und die von EUKLID vorgeschlagene Lösung durch. Dabei machen uns vor allem die von ihm gewählten Bezeichnungen zu schaffen,

doch mit einigen Anstrengungen und der von ihm angefertigten Skizze schaffen wir es noch vor der Pause, seine Lösung nachzuvollziehen.
Nach der Pause wenden wir uns nun seinem Beweis zu. Die ersten Zeilen können wir, nachdem wir wieder die einzelnen Bezeichnungen geklärt haben, gut nachvollziehen. Das erste Mal geraten wir an der Stelle (I, 5) ins Stocken – was könnte EUKLID mit dieser Angabe wohl gemeint haben? Wir wissen es nicht, übergehen die Stelle zunächst und machen erst einmal mit dem Beweis weiter. Doch schon kommt – dass mit „2R" zwei rechte Winkel gemeint sind, haben wir schnell geklärt – die nächste fragwürdige Angabe: (I, 32). „EUKLID weist auf irgendetwas hin", meint Nives. Ich bestätige das und berichte, dass die Elemente aus insgesamt 12 Büchern (Kapiteln) bestehen. „Mit (I, 5) bezeichnet EUKLID den fünften Satz im ersten Buch." Schnell schlagen wir den Satz nach und lesen dort: „Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich (...)" – das passt genau zu seiner Aussage vor dieser Angabe. Er beruft sich also auf eine Eigenschaft, die er früher bereits einmal bewiesen hat. „Welche Aussage meint EUKLID wohl mit der Angabe (I, 32)?" frage ich. Luna hat die Antwort sofort: „Die Summe der drei Winkel eines Rechtecks beträgt 2R, also 180 Grad." Ich gebe ihr die Elemente, um ihre Vermutung zu überprüfen. Als sie den Satz gefunden hat liest sie vor: „An jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel den beiden gegenüberliegenden Innenwinkeln zusammen gleich, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich." Während die meisten in der Klasse über die etwas umständliche Formulierung stolpern, zitiere ich noch einmal den letzten Teil des Satzes: „Die drei Winkel innerhalb eines Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich – das ist nichts anderes, als der uns schon seit langem bekannte Satz über die Winkelsumme im Dreieck." Ich habe das Gefühl, dass die Schüler nun voll dabei sind und den Unterricht mit einem Forscherblick verfolgen. Ich entscheide mich, nicht weiter auf die Details des Beweises einzugehen, sondern an seiner Struktur festzuhalten. Wir suchen weitere Sätze, auf die sich EUKLID bezieht. Insgesamt finden wir sechs. Ein kleines an der Tafel entwickeltes Schaubild zeigt die Verbindungen. „Nun ist es aber so, dass EUKLID in den Beweisen der Sätze, auf die er sich hier bezieht, wiederum die Aussagen früher bewiesener Sätze benutzt. Und in diesen Beweisen stützt er sich wiederum auf zuvor Bewiesenes." Ich deute dies an, in dem ich im Schaubild an der Tafel eine neue Ebene einzeichne. „Das müssen wir jetzt nicht bis zum Ende untersuchen, das würde uns viel Zeit kosten – ich habe das bereits getan", zwinkere ich und lege eine Folie auf, welche die Beweisstruktur des EUKLIDischen Beweises zeigt (vgl. Kap. 3.2.1.1 und Anhang B).
Das Erstaunen ist groß, die Schüler scheinen von den zahlreichen Pfeilen und dem scheinbaren Durcheinander wie erschlagen zu sein. Ich erläutere noch einmal, was man nun an diesem Schaubild genau ablesen kann und frage dann nach Vermutungen, was in diesem Gebäude ganz am Anfang stehen muss, denn offensichtlich kann man sich nicht immer wieder auf zuvor Bewiesenes berufen, irgendetwas muss ja am Anfang stehen. Wir untersuchen das Schaubild genau und erkennen, dass es nur wenige Sätze gibt, bei denen Pfeile ankommen – auf die sich andere Beweise also stützen – von denen aber keine Pfeile abgehen, die also selbst offenbar nicht bewiesen werden. All diese Felder tragen die Bezeichnung Def, Post, oder Ax.
Ich erläutere, dass Def für Definition, Post für Postulat und Ax für Axiom steht. Ich erläutere, dass Definitionen die Dinge klären, über die man redet, und dass Postulate die „Spielregeln" sind, die das Ausführen bestimmter Aktionen ermöglichen. Das Wichtigste aber sind die Axiome. „Denn Axiome sind nicht beweisbare, nicht beweisbedürftige, völlig evidente und offenbar richtige Aussagen. Jeder Beweis fußt direkt oder indirekt auf solchen offensichtlichen Grundwahrheiten. EUKLIDs Beweis zum Sechseck basiert – das können wir auf der Folie leicht abzählen – auf insgesamt sechs Axiomen. Nun meine Frage: Was glaubt ihr, auf wie vielen Axiomen ruhen wohl die Sätze in den Elementen *insgesamt*?" Sechzig, Einhundert, Dreihundert – die Schätzungen der Schüler gehen weit auseinander. Als es wieder etwas ruhiger geworden ist gebe die überraschende Auflösung: „Es sind gerade einmal zehn!" Damit hatte niemand gerechnet. Die kleinste Zahl, die ich bei den Schätzungen ge-

hört habe, war sechzig. „Alle Sätze in den zwölf Kapiteln der Elemente basieren insgesamt auf gerade einmal zehn Grundwahrheiten. Die gesamte Geometrie der Antike lässt sich aus nur zehn Axiomen ableiten." Ich lege eine Folie auf mit den zehn EUKLIDischen Axiomen auf und es wird sofort klar, dass es sich dabei tatsächlich um Offensichtliches handelt. Allerdings manchen manche Axiome wegen ihrer Formulierung Schwierigkeiten, weshalb ich einige gleichseitige Foliendreiecke auf den Overhead-Projektor lege, mit welchen die Axiome nun visualisiert werden sollen. Dies klappt hervorragend, die Schüler sind unheimlich schnell, arbeiten wunderbar miteinander und geben sich Tipps, so dass ich mich in dieser Phase fast gänzlich zurückziehen kann. Nach kurzer Zeit wurden alle Axiome visualisiert (vgl. dazu auch Abb. 3 in Kap. 1.1.3 sowie Anhang A).
Nun noch einmal zurück zu unserem eigenen Beweis: Auf welches dieser zehn Axiome haben wir eigentlich das anfängliche Problem zurückgeführt? Unserem Beweis liegt die Tatsache zugrunde, dass man ein Dreieck entlang einer Geraden parallelverschieben kann – das hatte wir bereits erkannt – und das ist nichts anderes als das EUKLIDische Parallelenaxiom: Es gibt durch jeden Punkt des Dreiecks genau eine zur Grundlinie parallele Gerade, und entlang dieser Geraden wird jeder Punkt – also das gesamte Dreieck – um die gleiche Strecke verschoben. Deshalb passt ein drittes Dreieck in die Lücke. Und da die Halben (zwei Dreiergruppe) von demselben (Sechsergruppe) einander gleich sind, kann man sechs gleichseitige Dreiecke zu einem lückenlosen Sechseck zusammenschieben. Durch dessen Ecken läuft ein Kreis, dessen Radius also sechsmal in der Peripherie umhergespannt ist.

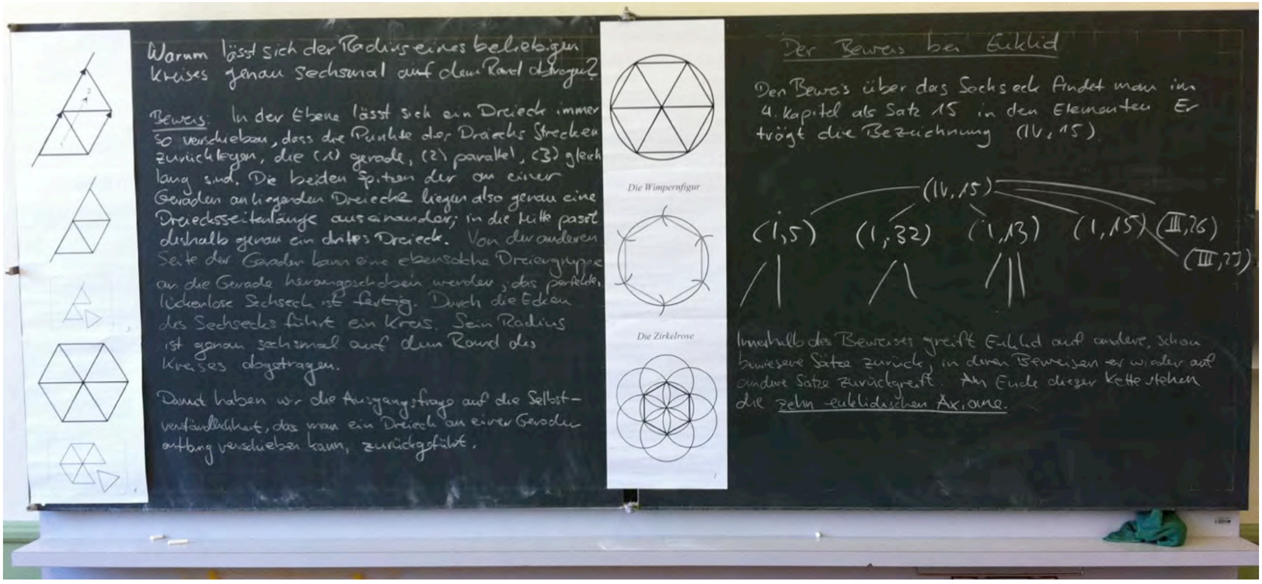

Abb. 34: Ergebnis eines intensiven, dritten Akts.

Die Stunde ist fast vorbei. Ich bin hochzufrieden, die Schüler scheinen es auch zu sein. Zum Abschluss versuche ich, einen großen Bogen zu schlagen und erläutere, dass nicht nur die Mathematik, sondern unser gesamtes Leben auf so etwas wie evidenten Grundwahrheiten basiert. Denn die Menschenrechte geben uns eine Art Sammlung von Grundwahrheiten des menschlichen Zusammenlebens. Zwar wurden sie erst im 18. Jahrhundert im amerikanischen und europäischen Raum für eine breite Öffentlichkeit formuliert, doch die dahinter stehende Idee ist deutlich älter. Schon im Alten Testament (die Zehn Gebote, in Exodus/2. Mose 20, 2-17), im Buddhismus (6. Jh. v. Chr.), bei KONFUZIUS (um 500 v. Chr.), in der antiken Tragödie „ANTIGONE" des griechischen Dichters SOPHOKLES (um 400 v. Chr.) und bei dem indischen Gesetzschreiber MANU (2./3. Jh. n. Chr.) finden sich „menschenrechtliche Mindeststandards". Der Widerstand unterdrückter Gruppen, Schichten und Völker zieht sich durch die Antike, das Mittelalter, den Humanismus und die Aufklärung bis in die Moderne, bis sich die über Jahrhunderte hinweg und an verschiedenen Orten erkämpfte Menschenrechtsidee schließlich durchsetzte und festgeschrieben wurde in so

bedeutsamen Dokumenten wie der Amerikanischen Unabhängigkeitserklärung von 1776 (Auszug: „Folgende Wahrheiten erachten wir als selbstverständlich: dass alle Menschen gleich geschaffen sind, dass sie vom Schöpfer mit gewissen unveräußerlichen Rechten ausgestattet sind...“), der Erklärung der Menschen- und Bürgerrechte der französischen Revolution von 1789 (Auszug: „Artikel I: Die Menschen sind und bleiben von Geburt an frei und gleich an Rechten (...). Artikel II: Das Ziel einer jeden politischen Vereinigung besteht in der Erhaltung der natürlichen und unantastbaren Menschenrechte. Diese Rechte sind Freiheit, Sicherheit und Widerstand gegen Unterdrückung“) und schließlich der Allgemeinen Erklärung der Menschenrechte der Vereinten Nationen von 1948 (Auszug: „Artikel I: Alle Menschen sind frei an Würde und Rechten geboren (...) Artikel III: Jeder Mensch hat das Recht auf Leben, Freiheit und Sicherheit der Person“).
Ein kurzer, aber wichtiger Einschub, für den ich mir mehr Zeit gewünscht hätte. Die verbleibenden Minuten reichen noch, um die entsprechenden Arbeitsblätter (Originalbeweis EUKLIDs, Struktur des Beweises, EUKLIDische Axiome), welche auch die Hausaufgabe enthalten, zu verteilen. *In zukünftigen Inszenierungen wird an dieser Stelle der Ausschnitt aus dem Historiendrama „LINCOLN“ (2012) präsentiert und diskutiert (vgl. Kap. 3.3.1).*

Epilog (Mi., 28.03.2012, 9./10. Lektion)

In der heutigen Doppelstunde wollen wir den Satz des THALES entdecken und beweisen. Zum Einstieg projiziere ich noch einmal den EUKLID-Beweis an die Wand und bitte die Schüler, Aussagen über dessen Struktur zu treffen. Anfängliche Problemstellung mit zugehöriger Lösung und Beweis für deren Richtigkeit, Bezugnahme auf bereits Bewiesenes, ganz am Anfang stehen Definitionen, Postulate und vor allem Axiome – nach einigen Minuten haben wir alles beisammen, selbst an den Unterschied zwischen Definition, Postulat und Axiom erinnern sich vor allem Rosanna und Jessy noch. Nachdem wir auch unseren eigenen Beweis noch einmal kurz betrachtet und uns dessen Struktur klar gemacht haben, gehen wir zusammen auf den Schulhof.
Dort angekommen bitte ich Michelle und Jen, sich etwa zehn Meter voneinander entfernt gegenüber aufzustellen – wie zwei Schauspieler an den Rändern einer Bühne. Die übrigen Schüler bitte ich, sich in einem Abstand von rund fünf Metern gegenüber von Jen und Michelle nebeneinander auf einer geraden Linie zu positionieren. Nun sollen sie mit dem einen, ausgestreckten Arm auf Jen, mit dem anderen auf Michelle zeigen, so dass der Winkel zwischen den Armen dem Blickwinkel entspricht, wenn man von Jen zu Michelle, d. h. von einem Schauspieler zum anderen blickt. „Wie groß schätzt Ihr den von Euren Armen eingeschlossenen Winkel?“, frage ich. Folgerichtig nennt fast jeder Schüler eine andere Winkelgröße. Auf die Genauigkeit kommt es mir in dieser Situation nicht an, allein die Tatsache, *dass* der Blickwinkel von jeder Position aus offenbar ein anderer ist, interessiert. Nun spanne ich schnell ein Seil zwischen Jen und Michelle, halbiere es und messe mit dem so erhaltenen Radius einen Halbkreis aus, an dessen Enden die beiden stehen und auf welchem sich nun alle Schüler platzieren. Das Spiel beginnt von vorn: Wieder zeigen alle mit ausgestreckten Armen auf Jen und Michelle. „Wie groß schätzt Ihr den Blickwinkel jetzt?“ Alle Schüler nennen nun Winkel etwa zwischen 80 und 100 Grad. Ich tue ungläubig und drücke Maida und Roberto ein großes Geodreieck und ein Seil in die Hand und bitte sie, die Blickwinkel bei verschiedenen Mitschülern zu überprüfen. Sie spannen mehrere Seile und beginnen zu messen – nach der zweiten Messung, die wie die erste einen Winkel von 90 Grad offenbart, vermutet Maida einen Messfehler und möchte deshalb die erste Messung wiederholen. Sie tut es – doch es sind wieder etwa 90 Grad. Ich ermutige sie dazu, noch zwei weitere Messungen an anderen Positionen durchzuführen. Auch hier kommen Maida und Roberto zum gleichen Ergebnis. Beide schauen mich verwundert an, auch einige Mitschüler können das Ergebnis nicht ganz einordnen. Wir packen alles zusammen und gehen zurück in den Klassenraum.

Dort angekommen besprechen wir noch einmal, was wir gerade auf dem Schulhof beobachtet haben und fixieren unsere Beobachtung an der Tafel: „Verbindet man einen Punkt eines Halbkreises geradlinig mit dessen Eckpunkten, so entsteht zwischen den beiden Richtungen immer ein Winkel von 90 Grad." Wir taufen unsere Beobachtung zunächst „Satz über den Halbkreis". Erst wenn dieser bewiesen ist, werden wir ihn fachsprachlich korrekt „Satz des THALES" nennen.
Nun also zum Beweis. Ich lege wieder die Folie mit unseren Problemlösestrategien auf und weise darauf hin, sich an diesen Strategien zu orientieren. Außerdem empfehle ich, den Beweis zum Satz über das Sechseck noch einmal durchzugehen und dann mit diesem im Hinterkopf und in Kleingruppen den Satz über den Halbkreis zu beweisen. Bis zum Ende der ersten Stunde lasse ich die Schüler in ihren selbstgewählten Gruppen arbeiten. Beim Umhergehen stelle ich fest, dass sie sich gut austauschen und sich am Sechseck-Beweis orientieren – allerdings sehe ich nirgends wirklich Vielversprechendes. Nach der Pause informiere ich mich bei den Gruppen nach dem Stand der Arbeit. Wir diskutieren die verschiedenen Ansätze und arbeiten nun im Plenum weiter.
Der Satz und die Ausgangsskizze stehen an der Tafel. „Wir sollten alles in die Figur einbringen, was wir kennen", helfe ich und weise auf den ersten Schritt des Sechseck-Beweises hin. Amon hat die Idee, den Radius des Halbkreises einzuzeichnen. Ich bitte ihn, dies selbst an der Tafel vorzunehmen, was er bereitwillig tut: Er verbindet den Mittelpunkt des Halbkreises mit einem Endpunkt. Erst auf mein Nachfragen hin erklärt Ada, dass man den Mittelpunkt auch mit dem anderen Endpunkt verbinden könne und Luna weist darauf hin, dass man den Radius theoretisch zu allen Punkten des Halbkreises zeichnen könnte, und – da wir ja einen ausgezeichneten Punkt des Halbkreises haben, der bereits mit dessen Endpunkten verbunden ist – den Radius in Analogie zum Sechseckbeweis auch zu diesem Punkt ziehen können. Die beiden dabei entstehenden Winkel bezeichnen wir mit α und β. „Und den Kreis brauchen wir jetzt eigentlich auch nicht mehr", ergänzt Luna. Doch ich interveniere und sage, dass wir den Kreis nur entfernen dürfen, wenn sich das Problem dabei nicht ändert. Wir müssen also umformulieren. Dieser Schritt ist schwierig und nur mit viel Hilfe meinerseits gelangen wir schließlich zu der folgenden Formulierung, die ohne den Halbkreis auskommt und die wir notieren: „Zwei Punkte liegen fest. Ein dritter hält von der Mitte der die ersten Punkte verbindenden Strecke denselben Abstand wie sie. Die Richtungen, die von diesem dritten Punkt zu den anderen beiden gehen, bilden – wie es scheint – miteinander einen Winkel von einer viertel Umdrehung."
Ich lenke die Aufmerksamkeit nun auf die beiden Winkel an den Eckpunkten des Halbkreises. „Wie groß mögen diese wohl sein?" Melina sagt sofort, dass es sich bei den Winkeln ebenfalls um α und β handele – aber warum? Ihr „das ist doch logisch" lasse ich so jedoch nicht gelten, fordere eine Begründung ein und weise auf die Besonderheit der Dreiecke hin. Es ist wieder Amon, dem zuerst auffällt, dass es sich dabei um gleichschenklige Dreiecke handelt, denn jeweils zwei Seiten entsprechen dem Radius des einstigen Kreises. Und dass bei gleichschenkligen Dreiecken die Winkel an der Basis gleich sind, ist tatsächlich logisch, denn man könnte die Dreiecke entlang der Höhe falten. Das leuchtet ein, wir skizzieren die Faltkniffe und bezeichnen die entsprechenden Winkel an den Enden des Halbkreises mit α bzw. β.
Jetzt gerät der Beweis etwas ins Stocken. Es scheint, dass keine Vereinfachung, keine Strategie hilft. „Was wollen wir eigentlich genau zeigen?", frage ich und versuche so, die Aufmerksamkeit wieder auf das konkrete Problem zu fokussieren. „Wir wollen zeigen, dass der Winkel ‚oben' 90 Grad groß ist", sagt Nives. „Und wir haben das Problem, das offenbar keine weitere Vereinfachung oder Umformulierung möglich ist – zumindest sehen wir momentan keine. Wie wäre es dann, wenn wir einfach etwas ausprobieren, was uns beim Sechseck-Beweis auch geholfen hat?", schlage ich vor und deute auf unsere dritte Strategie („...benutzen, was bei einem anderen Problem schon einmal geholfen hat"). „Eine Verschiebung?" fragt Ada ungläubig. Ich erkläre, dass systematisches Ausprobieren durchaus eine gute Strategie ist, um Probleme zu lösen. Außerdem gehören Um- und Irrwege immer dazu, auch beim Führen eines mathematischen Beweises. Zudem haben wir ja nichts zu

verlieren. Wenn uns die Verschiebung nicht hilft, können wir den Schritt schnell wieder rückgängig machen. Ada zeigt sich zwar einverstanden, scheint aber etwas genervt zu sein, da sich der Beweis wieder etwas hinzieht. Warum jetzt auch noch Umwege machen?
Wir verschieben das Dreieck und bezeichnen in dem neu entstandenen Dreieck entsprechend alle Winkel. Und nun? „Ein drittes Dreieck passt in die Lücke“, sagt Chiara fragend. Eine Begründung liefert Jessy: „Das Dreieck wurde um die Länge der Grundseite an der Geraden entlang verschoben, deshalb passt das dritte Dreieck." Das reicht mir als Begründung, auch wenn diese streng genommen unvollständig ist (alle Punkte des Dreiecks legen eine Strecke zurück, die der Länge der Grundseite entspricht, also auch die Spitze des Dreiecks. Das ist der Grund, warum ein drittes Dreieck genau in die Lücke passen *muss*).
Wir zeichnen also das fehlende Dreieck ein und bezeichnen wiederum alle entsprechenden Winkel mit α bzw. β. Jetzt steht die Lösung schon da, doch es sieht niemand. Allerdings merke ich, dass viele Schüler wirklich gerne zum Ende kommen würden, die Formulierung des Beweises strengt sie unheimlich an, die Aufmerksamkeit sinkt mit jeder Minute. Ich versuche ein letztes Mal zu motivieren und offenbare, dass wir die Lösung vor unseren Augen haben, wir müssten sie nur noch erkennen und notieren. „Wie groß ist dieser Winkel?“, frage ich und deute auf den durch die Verschiebung entstandenen Winkel zwischen den beiden Ausgangsdreiecken. Maida erkennt, dass es sich um eine halbe Umdrehung handelt, der Winkel also 180 Grad groß sein muss. „Also gilt doch offensichtlich: $2\alpha + 2\beta = 180$. Wir dividieren beide Seiten der Gleichung mit zwei und erhalten: $\alpha + \beta = 90$“, schließe ich etwas führend den Beweis.
Damit sind wir fertig, ein großes und erleichtertes Aufatmen geht durch die Klasse. In den verbleibenden 15 Minuten bitte ich die Schüler, den Beweis, den wir bislang zwar mit vielen Skizzen verbildlicht, aber mit nur wenigen Worten verschriftlicht haben, auszuformulieren. Um sich besser orientieren zu können erhalten sie ein kleines Arbeitsblatt mit den entsprechenden Skizzen. Nach 15 Minuten sehe ich in vielen Heften schöne Formulierungen und Melina fixiert ihre mit Hanna erarbeitete Version zur Sicherung für alle an der Tafel.

Epilog – Fortsetzung (Fr., 30.03.2012, 11./12. Lektion)

Mit dieser Doppelstunde schließen wir die Einheit zur Entdeckung der Axiomatik ab. Ich beginne mit einem stillen Impuls und lege kommentarlos eine Folie von einem Amphitheater auf. Es dauert ein paar Sekunden, bis die ersten Meldungen kommen. Nach rund einer Minute bitte ich Jessy um einen Kommentar, sie weist darauf hin, dass die Zuschauerreihen Halbkreise bilden und Arianne ergänzt, dass deshalb der Blickwinkel vom einen zum anderen Ende der Bühne 90 Grad beträgt. Hanna zeichnet drei Blickwinkel ein und erinnert sich, dass dieser Zusammenhang „Satz über den Halbkreis“ genannt werde. Ich nehme die Gelegenheit wahr um zu klären, dass dieser Satz schon lange vor EUKLID, nämlich um 500 v. Chr. bekannt war und angewandt wurde. Benannt ist er nach dem bedeutenden griechischen Mathematiker THALES von Milet, dem Begründer der Philosophie und Astronomie. Von ihm berichtet man zudem, er habe mithilfe eines einfachen Holzstabes und dessen Schattenwurfs die Höhe der ägyptischen Pyramiden bestimmt – ein früher Vorläufer der Strahlensätze – und mithilfe von maßstäblichen Konstruktionen die Entfernung von Schiffen von der Küstenlinie abgeschätzt.

Die verbleibenden 20 Minuten der Doppelstunde sollen nun für eine Evaluation der Einheit genutzt werden. Um ein Feedback zu erhalten habe ich mich dazu entschieden, die Schüler einen freien Text ohne weitere Vorgaben schreiben zu lassen. Dazu gibt es zwei Gründe: Einerseits habe ich schon öfter die Erfahrung gemacht, dass die Schüler der Klasse eine sehr hohe Reflexionskompetenz besitzen, andererseits gelangen sie im Schreiben von Fließtexten stets zu sehr guten Ergebnissen – die Deutschlehrerin hatte mir diese Beobachtung bereits bestätigt. Darüber hinaus wusste ich, dass meine Geschichtskollegin in dieser Klasse bereits das Lehrstück „Gombrichs Weltgeschichte“ unterrichtet hatte, in dessen Rahmen die Schüler ebenfalls freie Texte formulieren mussten. Auch sie war von den Ergebnissen beeindruckt. Diese Variante der Evaluation erschwert jedoch das Erstellen einer Feedback-Partitur, was seit BRÜNGGER (2005) eigentlich zum Standard innerhalb der Lehrkunst geworden ist.

3.3.3 Reflexion

3.3.3.1 Eigene Reflexion

(1) Ouvertüre

Die Forderung WAGENSCHEINs, dass sich das zentrale Phänomen aus dem vom Lehrer vorgelegten exponierten Material erheben sollte (vgl. WAGENSCHEIN 2008, 127), wird in der Lehrstück-Ouvertüre intensiv umgesetzt. Diese Weiterentwicklung des Entwurfes WAGENSCHEINs stellt m. E. einen sehr gelungenen Einstieg in die Problematik dar. Durch die Auswahl kulturauthentischen Materials, die sich langsam öffnende Vielfalt der geometrischen Natur- und Kunstformen (von den wenigen ausliegenden Plakaten hin zu den vielen individuellen Briefrollen), die Methodenwechsel (Sokratisches Gespräch im Stuhlkreis, Gruppenarbeit, kleine Präsentationen Vorträge im Plenum) und vor allem die bewusste Verlangsamung des Unterrichtstempos unter Beachtung der „Regeln des Gesprächs“ (vgl. WAGENSCHEIN 2002a, 59), wird ein ausgiebiges „Baden im Phänomen“ ermöglicht – „der Menschengeist (senkt sich betrachtend) in die phänomenale Vielfalt sinnlich erfahrener Gestalten und Geschehnisse“ (RUMPF 2003, 198f). Allesamt wichtige Voraussetzungen für die Entdeckung der Zirkelrose und das ihr zugrundeliegende mathematische Phänomen – nicht nur in der beschriebenen Inszenierung, sondern grundsätzlich. Die Behandlung des „Sokratischen Dialogs“ von Alfréd RÉNYI (vgl. RÉNYI 1966) hat zum Ziel, die Idealität geometrischer Figuren in den Fokus zu rücken. Die Schüler sollen entdecken, dass „mathematische Objekte mentale Konstruktionen“ sind (LEUDERS 2010, 25) – also auch die Zirkelrose. Dies ist m. E. sehr gelungen, was auch spätere Situationen und Argumentationen außerhalb des Lehrstücks immer wieder zeigten. Die vorgenommene Kürzung des im Original rund 20 Seiten langen Dialogs auf zwei Seiten (vgl. Anhang C) ist gelungen und im Hinblick auf eine unterrichtliche Verwendung m. E. unumgänglich. Das Lesen des Dialogs in verteilten Rollen war für die Schüler eine anspruchsvolle, aber zu bewältigende Aufgabe. Das sich anschließende Gespräch hat gezeigt, dass der inhaltliche Kern von den meisten Schülern erfasst wurde, die im Plenum erfolgte Diskussion führte schließlich zu einem breiteren und tiefergehenden Verständnis. Die Entscheidung, diesen Hinweis WAGENSCHEINs aufzunehmen und den Dialog im Unterricht zu nutzen, halte ich für genau richtig.

(2) Der Auftritt EUKLIDs

In allen bisherigen Inszenierungen habe ich den Auftritt EUKLIDs wie beschrieben inszeniert: Am Anfang de Stunde wird ein Besucher angekündigt, der aber noch nicht eingetroffen ist, während ich das Zimmer verlasse, um den Gast zu suchen, betritt dieser den Raum. Diese Art der Inszenierung ist bislang immer sehr gelungen, die Schüler sind der Maskerade stets gefolgt – auch wenn dabei eine Art weihnachtlicher Unterton mitschwingt: Während des Besuchs des Weihnachtsmannes ist der Vater nicht im Zimmer und taucht erst wieder auf, als der Besucher das Haus wieder verlassen hat. Alle wissen bescheid, doch alle spielen mit. Es wäre m. E. im Sinne der Improvisationsfreiheit durchaus möglich, den Auftritt EUKLIDs so zu inszenieren, dass sich die Lehrperson direkt vor den Schülern für alle sichtbar den weißen Schal um die Schultern legt. Diesem speziellen Inszenierungsdetail messe ich aber keine allzu große Bedeutung bei, jedoch halte ich einen grundsätzlichen Auftritt EUKLIDs für unumgänglich. Der entscheidende Wechsel von der Tatsachen- zur Ursachenfrage erhält so eine enorme Betonung, die durch eine rein mündliche Erzählung

so nicht zu erreichen wäre. EUKLID unterstreicht die Fragwürdigkeit des entdeckten Phänomens („Warum schließt sich die Zirkelrose eigentlich ganz genau?“), nach seinem Auftritt ruft es förmlich „Hier bin ich. Suche die Lösung!“ (WAGENSCHEIN 2008, 128). Darüber hinaus wird EUKLID im gesamten Lehrstück, sogar in der gesamten Beweistrilogie eine zentrale Rolle spielen, seine Elemente werden immer wieder auftauchen, die Schüler werden sich des Öfteren mit seinen Beweisen auseinander setzen.
Der Auftritt EUKLIDs ist für den Verlauf des Lehrstücks entscheidend. Er ist nicht durch mündliche Berichte zu ersetzen, und schon gar nicht „aus Zeitgründen“ zu streichen. Er hilft, die Segel zu setzen, offenbart Entscheidendes und ist damit wegweisend für den weiteren Verlauf des Lehrstücks.

(3) Ufer-Hilfen und Problemlösestrategien
Das Sammeln von Problemlösestrategien zu Beginn der Suche nach einer Begründung hat sich vollends bewährt. Denn natürlich kennen die Schüler solche Strategien, sie haben ein bestimmtes Vorgehen, um Probleme zu lösen (nicht nur mathematische, sondern vielmehr alltägliche), nur haben sie bislang möglicherweise noch nie so direkt über diese verwendeten Strategien nachgedacht. In allen bisherigen Inszenierungen wurden in ähnlichen Formulierungen die Strategien genannt, die auch in der beschriebenen Inszenierung auftauchten. Dabei überrascht immer wieder, dass diese eine Zusammenfassung der von WAGENSCHEIN formulierten Ufer-Hilfen darstellen. „Das Wort ‚Ufer-Hilfe’ will sagen, daß der Lehrer nur ‚dabei’ steht und doch hilft. Er gibt ‚Beistand’. (...) Das Gegenteil einer ‚Ufer-Hilfe’ wäre es, wenn er Lehrer solche Winke gäbe: ‚Verbinde den Punkt E mit dem Punkt F. Dann siehst Du etwas!’ Oder: ‚Vergleiche die beiden Dreiecke, die ich jetzt mit I und II bezeichne’. Der Schüler fragt dann vergebens: ‚Warum soll man gerade *das* tun? Und woher weiß es der *Lehrer*?’“ (WAGENSCHEIN 2008, 152f; Hervorhebung im Original). In Bezug auf das Sechsstern-Phänomen nennt WAGENSCHEIN insgesamt acht solcher Ufer-Hilfen. Die folgende Tabelle zeigt die offenkundige Verbindung zu den Strategien der Schüler, welche bis auf die vierte allesamt von ihnen genannt und formuliert worden sind.

WAGENSCHEIN (vgl. 2008, 137-146)		Schüler (Inszenierung März 2012)	
1	Benutze nur das, was wir in die Figur eingebracht haben (das „Gegebene“), das aber vollständig. Sonst benutze nichts außer dem Selbstverständlichen.	1	Nur benutzen, was man sicher weiß oder was wirklich selbstverständlich ist.
2	Alles Eingebrachte sollte sichtbar sein.	2	Notizen machen, alles aufschreiben, was man benutzt.
3	Können wir die Figur vereinfachen, indem wir etwas für die Frage Überflüssiges wegwischen?	3	Sich austauschen mit anderen, benutzen, was bei einem anderen Problem schon einmal geholfen hat.
3a	Nach jeder Vereinfachung der Figur ist das ursprüngliche Problem neu zu formulieren, und es ist zu prüfen, ob es unverkürzt dasselbe geblieben ist.	4	Problem vereinfachen. Aber: Das Problem darf sich nicht verändern, es muss im Kern das gleiche bleiben. Dies ist nach jeder Vereinfachung zu überprüfen.
4	Was einmal geholfen hat, das kann auch ein zweites Mal (oder bei anderer Gelegenheit) helfen.		
5	Haben wir ähnliches schon einmal gehabt?		
6	Ist das selbstverständlich Scheinende wirklich selbstverständlich?		
7	Was einmal geholfen hat, kann auch in anderen Fällen helfen.		
8	Was wollten wir eigentlich?		

Tab. 15: Vergleich der Ufer-Hilfen WAGENSCHEINS und der Problemlösestrategien der Schüler.

Mir gefällt an dem beschriebenen Vorgehen, dass während der gesamten Suche nach einer Begründung für das entdeckte Phänomen die schülereigenen Ideen und Strategien zentral sind. Sie lösen das Problem – soweit möglich – mit ihren eigenen Mitteln, nicht etwa nach einem vorgegebenen Plan. Hinweise und Hilfen müssen nicht oberlehrerhaft von der Lehrperson eingebracht werden, die in den Schülern schlummernden Kräfte sind dazu vollends geeignet. Auf diese Weise wird das Suchen und Finden auch auf andere Probleme übertragbar.

(4) Die Formulierung einer Begründung
Methodisch hat sich für die Suche nach einer Begründung das Ich-Du-Wir-Verfahren („Think-Pair-Share") sehr bewährt. Das eigene Nachdenken über das Fortschreiten der Begründung (Ich-Phase), der Austausch mit dem Nachbarn über die Verbindung zwischen den einzelnen Schritten und Figuren (Du-Phase) und schließlich die Plenumsdiskussion über neue Ideen, Ansätze, Entdeckungen und Begründungen (Wir-Phase), immer unterstützt durch die schülereigenen Strategien, ermöglicht m. E. eine Individualgenese der erarbeiteten Begründung und damit eine tiefgehende Sicherung der gewonnenen Erkenntnisse in besonderem Maß.

(5) Die Elemente und der Original-Beweis EUKLIDS
Es gehört zu den schönsten Momenten des Lehrstücks: Nachdem das entdeckte Phänomen begründet worden ist und die genauere Analyse des Vorgehens offenbarte, dass die anfängliche Beobachtung eine logische Folgerung aus der unmittelbar anschaulichen geometrischen Tatsache der Dreiecksverschiebung ist, wird der Originalbeweis EUKLIDs betrachtet und dessen Struktur untersucht. Dass sich diese nur in einem komplizierten und verworrenen Netz aus miteinander verbunden Sätzen darstellen lässt, ist zunächst erschreckend. Doch dann die Erleichterung: Das scheinbare Durcheinander löst sich bei genauerem Hinsehen überraschend einfach auf, die Basis des Satzes besteht aus gerade einmal sechs Axiomen. Die dabei bewusst werdende Möglichkeit, eine Behauptung logisch auf evidente Grundwahrheiten zurück zu führen, ist die zentrale Erkenntnis des Lehrstücks. Das damit Geschaffte ist ein kleines Abbild von dem, was EUKLID geleistet hat, als er alle Erkenntnisse der gesamten griechischen Mathematik auf nur zehn solcher Grundwahrheiten aufbaute. „Die so eröffnete Axiomatik legitimiert erst (für Schüler und Lehrer) das umgekehrte Verfahren, nun auch deduktiv von ihr Gebrauch zu machen" (WAGENSCHEIN 2008, 148). Der konkrete Inhalt des Satzes, d. h. die Tatsache, dass sich der Radius eines Kreises sechsmal in der Peripherie herumspannen lässt, ist dabei mathematisch gesehen nur von geringer Bedeutung. Der Satz ist „nur" ein Hilfsmittel, um die deduktive Struktur des Gebäudes der Mathematik sichtbar zu machen.

(6) Der Satz des THALES
Das „‚Beilegen' des Sonderbaren an das ‚Selbstverständliche'" (WAGENSCHEIN 2008, 143) auf eine weitere „geometrische Merkwürdigkeit" (ebd.) – den Satz über den Halbkreis bzw. den Satz des THALES – stellte als vierte Funktion im Lernprozess (vgl. AEBLI 2006, 351ff), d. h. im Sinn einer Anwendung, m. E. einen erfolgreichen und gelungenen Transfer des zuvor Erarbeiteten dar. Die Entdeckung des Phänomens auf dem Schulhof war tatsächlich erstaunlich. Als bei der zweiten Winkelmessung infolge 90 Grad heraus kam, dachten die Schüler zunächst an einen Messfehler. Nachdem sie das erste Ergebnis jedoch überprüft und weitere Winkel auf dem Halbkreis gemessen hatten, verstärkte sich die merkwürdige Ahnung, dass *jeder* Winkel auf dem Halbkreis ein rechter sein könnte. Nach der Formulierung des Phänomens in der Klasse erstaunte mich die Breite der Mitarbeit bei der Entwicklung des Beweises. Auf Basis des Sechssternbeweises sowie ihrer eigenen Strategien entwickelte sich eine sachliche, fundierte Diskussion, in welcher die Schüler – so mein Eindruck – allein vom Problem bewegt wurden. Einzig gegen Ende geriet die Formulierung ein wenig ins Stocken. Insgesamt aber gelang es, jeden einzelnen Schritt zu formulie-

ren, so dass am Ende der Stunde der gesamte Beweis als Gemeinschaftsprodukt der Klasse an der Tafel erarbeitet war.
Der Satz des THALES stellt in meinen Augen einen würdigen Abschluss des Lehrstücks dar. Er vermag den Blick noch einmal ins antike Griechenland zu lenken und mit THALES rückt ein weiterer, bedeutender griechischer Denker in den Unterricht. Eine Erweiterung wäre an dieser Stelle durchaus denkbar, denn im dritten Buch der Elemente (§31) beweist EUKLID einen Satz, welcher den als „Satz des THALES" bekannten Zusammenhang enthält. In Wahrheit zeigt der Satz allerdings noch sehr viel mehr, wörtlich lautet er: „Im Kreise ist der Winkel im Halbkreis ein Rechter, der in einem größeren Abschnitt kleiner als ein Rechter und der in einem kleineren Abschnitt größer als ein Rechter (ist); außerdem ist der Winkel des größeren Abschnitts größer als ein Rechter und der Winkel des kleineren Abschnittes kleiner als ein Rechter" (THAER 2005, 67). Im ersten Teil des Beweises zeigt EUKLID, dass der auf dem Halbkreis über dem Durchmesser ein rechter Winkel ist. Seine Argumentation entspricht dem typischen, klassischen Beweis des Satzes und könnte durchaus innerhalb des Lehrstücks Anwendung finden.

(7) Nachsatz: LINCOLN (2012)
In der diesem Kapitel zugrunde liegenden Inszenierung vom März 2012 konnte die in Kap. 3.1 beschriebene Szene aus dem Historiendrama „LINCOLN" noch nicht eingebaut werden, da der Film erst im November 2012 in den USA (in Deutschland im Februar 2013) erschienen ist. In einer anderen Inszenierung des Axiomatik-Lehrstücks im Oktober 2013 jedoch stellte die LINCOLN-Szene den Abschluss des III. Akts dar. Die damit dokumentierte Verbindung der 2300 Jahre alten Elemente und Ideen EUKLIDs zu einer der zentralsten Gestalten der Weltgeschichte, verbunden mit der oscarprämierten Inszenierung Hollywoods, beeindruckte die Schüler sehr. Die gerade einmal 40 Sekunden dauernde Szene unterstreicht die Gegenwartsbedeutung der gewonnenen Erkenntnisse und eignet sich in meinen Augen hervorragend als Abschluss des dritten Aktes, sofern sie angemessen besprochen, relativiert und historisch eingeordnet wird.

Gesamtreflexion
Die Entscheidung, die Entdeckung der Axiomatik nicht zum Inhalt einer (klassischen) Prüfung zu machen, war genau richtig. Es ist befriedigend und anregend, wenn das Interesse der Schüler ernsthaft und ehrlich ist und nicht durch die Angst erstickt wird, über den jeweiligen Gegenstand Prüfungen ablegen und Noten verdienen zu müssen. Dennoch könnte in zukünftigen Inszenierungen über den Einsatz alternativer Prüfungsarrangements nachgedacht werden. In diesem Fall jedenfalls war das Interesse m. E. ein ehrliches. Dessen Entwicklung setzt voraus, dass von Beginn an Zeit und Muße anwesend sind. „Solche genetisch-sokratischen Entdeckungszüge sind nicht umsonst. Sie fordern Zeit. Doch sind sie nicht zeit-‚raubend', sondern zeit-‚lohnend'" (WAGENSCHEIN 2008, 148). „Solche vertiefende Betrachtung, solches Sich-versenken in alle Seiten einer Frage können weder erzwungen noch im Eiltempo durchgepeitscht werden. Sie brauchen Zeit – die Zeit für den Schüler, sich seine Gedanken zu machen und zu wundern. Das ist, an ihrem Bildungsertrag gemessen, wohlaufgewendete Zeit!" (WITTENBERG 1963, 82).
Die gewonnene Erkenntnis ist wahrlich bemerkenswert: Hier gibt es ein Gebiet, in dem es absolute Gewissheit und Genauigkeit gibt, in dem ein restloses Verstehen möglich ist. Wir haben eingesehen, dass unsere fragwürdige anfängliche Beobachtung eine mittelbare logische Folgerung aus einer unmittelbar anschaulichen geometrischen Tatsache – der Dreiecksverschiebung – ist. Das Seltsame wurde aus Selbstverständlichem verstanden, eine echte mathematische Erfahrung: „viele der zentralsten Fragen, die sich dem Menschen stellen, (sind) *elementar* und ohne weiteres zugänglich" (WITTENBERG 1963, 84; Hervorhebung im Original).
Die Eigenschaft der Zirkelrose ist anfangs noch nicht sofort sonderbar, wird aber bei genauerer Betrachtung und Beschäftigung mit dem geometrisch Idealen absonderlich und unglaubhaft. Schnell herbeigerufene Erklärungen wie der Winkelsummensatz im Dreieck

werden als scheinbar selbstverständlich, aber im Kern nicht *wirklich* verstanden und für unsere Zwecke daher unbrauchbar, identifiziert, mithilfe eigener, streng angewandter Strategien wird das Problem jedoch mehrfach umformuliert, so dass sich langsam ein durchgreifendes Verstehen durchsetzt und der Triumph über das bewältigte Sonderbare ein Gefühl geistiger Macht verleiht. Die Beschäftigung mit EUKLID und seinen Elementen prägt Begriffe wie Definition, Postulat und Axiom, die allmählich realisierte Möglichkeit der Axiomatisierung eines gesamten Stoffgebiets legitimiert, nun auch deduktiv von ihr Gebrauch zu machen und die Bedeutung der Axiomatik über die Mathematik hinaus öffnet schließlich den Blick für das wirklich Kategoriale und Fundamentale bis hin zur Entwicklung der Menschenrechte. Insgesamt scheint mir in dem Lehrstück genau das verwirklicht zu sein, was WITTENBERG (1963, 60f) als „Echtheit des mathematischen Unterrichts" bezeichnet: „das allmählich zielsicher und zweckmäßige werdende Ringen des Geistes mit seinem Gegenstand – die anfängliche Hilflosigkeit, die allmähliche Einsicht, das plötzliche Verstehen, das Ahnen verborgener Zusammenhänge, der verfängliche Irrtum, der scheinbar vielversprechende, aber irreführende Versuch, die verführerische Verallgemeinerung, das Erlebnis des zunächst Unbegreiflichen, das unüberwindlich Schwierige, das Selbstverständliche, die Entlarvung des nur scheinbar Selbstverständlichen; das Schmieden zweckmäßiger geistiger Werkzeuge, das Prägen adäquater Begriffe, das schöpferisch-kritische Neudurchdenken des bereits Erreichten; das allmähliche Zustandekommen des Überblicks, die Schaffung einer folgerichtigen, systematischen, in sich verhältnismäßig geschlossenen Theorie; das allmählich erstarkende Erleben des Besitzes geistiger Macht, der Fähigkeit zu eigener Einsicht im Denken. All das muß im Studium des Schülers zur Wirklichkeit werden, wie es im Tun des schöpferischen Mathematikers Wirklichkeit ist. Dann wird jenes Studium dem Ziel gerecht werden, den Schüler erfahren zu lassen, was Mathematik wirklich ist."

3.3.3.2 Schülerfeedback

Nach dem Lehrstück bat ich die Schüler, schriftlich ein Feedback zu geben. Ich entschied mich, sie ohne weitere Vorgaben einen kurzen Text schreiben zu lassen. In einer anderen Klasse, in welcher ich das Lehrstück einige Wochen zuvor unterrichtete, habe ich ein Feedback eingeholt, welches sich an den einzelnen Abschnitten des Lehrstücks orientiert. Das Feedback ist im Folgenden wörtlich abgedruckt. Auch Rechtschreibung und Orthographiefehler wurden nicht verbessert.

S	**Gesamtfeedback**	**Verbesserungs-vorschläge**	**Sonstige Kommen-tare**
1	• Lotus Blume • Strategien zur Problemlösung • Problenformulierung • Beweis und Beobachtung • Euklid & Co • Satz über den Halbkreis Ich habe unsere Themen seit dem 14.03.12 Aufgeschrieben. Ich muss schon sagen dass es verwierent war als wir alle im Kreis sassen und Bilder anschauten. Ich frag mich wiso sie das nicht schon immer gemacht haben? Es war viel spannender und ich freute mich auf die Std, da ich gut mitmachen konnte. Die Problemlösungen fand ich cool, so wie ein richtiger Mathematiker. Die Diskussionen darüber wiso es so ist aber man die Begründung braucht um unser feststellung zu beweisen! Mathemathik ist nicht Rechnen fast jede Std haben sie uns das gesagt. Ich finde es toll, wie sie die Mathematische Geschichte im Unterricht mit eingepackt haben. So habe ich eine kleine Vorstellung wie das alles zu stande gekommen ist. Es ist gut zu wissen von wenn/wo es herkommt, wenn wir was machen.	Ja, wiso nicht ich hatte freude daran. Dann wir eine andere 1. Klasse auch sein Spass dabei haben.	Wiso machen sie das nur mit 1. Klassen und nicht weiter?
2	Die Allgemeine Entdeckung hat mir eigentlich sehr gut gefallen weil ich so etwas vorher noch nie gemacht habe und garnicht gewusst habe dass man so Probleme löst. Beim Einstieg hatte ich keine Ahnung um was es gehen sollte bis wir dann die Lotusblüte zeichnen mussten. Im allgemeinen fand ich es noch einen spannenden Einstieg, so wie das Thema auch. Ich finde es toll dass wir so spielerisch zumteil gelernt haben, denn so habe ich es auch gut	Ja das ist schon eine gute Idee. Man sollte es vielleicht nicht soo genau lösen weil irgendwie, für mich ist es einfach so das ein	Toll das wir draussen waren! doch leider nur einmal. ☹