Pythagoras oder die Wurzeln der Wahrheit

Der berühmteste aller Lehrsätze der Mathematik ist zugleich auch einer der wichtigsten. Daher sollte sich jeder einmal davon überzeugen, warum er gilt. Dazu gibt es Hunderte von Möglichkeiten.

Von Ulf von Rauchhaupt

Textaufgabe: Paul und Paula waren zusammen wandern. Dann verabschieden sie sich und gehen getrennte Wege. Paul läuft geradeaus in Richtung Westen, vier Kilometer Paula drei Kilometer nach Osten. Wie weit sind sie nun voneinander entfernt? Das kann jeder auch nach drei Wochen Strandurlaub berechnen: Da die Strecken auf einer Linie liegen, muss man nur addieren; drei plus vier sind sieben Kilometer, fertig. Aber was, wenn Paul seine vier Kilometer zwar nach Westen wandert, Paula ihre drei aber nach Norden? Die beiden laufen nun nicht mehr auf derselben Graden. Der Vorgang ist jetzt zweidimensional. Grübel.

Wer dafür Google Maps anwirft, hat verloren. Denn es gibt einen mathematischen Satz, der jedem über die gesuchte Strecke Auskunft gibt, der sieht, dass die beiden bei dieser Richtungswahl die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, nennen wir sie a und b, abgeschritten haben. Dann ist ihre Entfernung zueinander die Hypotenuse c des rechtwinkeligen Dreiecks, und es gilt der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Mit den gegebenen Zahlen haben wir sogar Glück: $c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 15 = 25$, und das ist eine Quadratzahl, damit ist ihre Wurzel, also die aus 25, eine ganze Zahl: 5 Kilometer. Addierten sich die Kathetenquadrate nicht zu einer Quadratzahl, zieht man die Wurzel eben mit dem Taschenrechner. Damit ist die Rechnung auch in zwei Dimensionen einfach geworden.

Aber warum gilt der Satz des Pythagoras überhaupt? In jeder Schulform in Deutschland müssen ihn spätestens in der neunten Klasse alle lernen und anwenden, die Wert auf ihre Mathematiknoten legen. Nicht wenige werden sich damit begnügen. Dabei kann man auch verstehen, warum er gilt, wenn man einige Voraussetzungen macht, die so intuitiv richtig sind wie Paul und Paulas Entfernung nach ihren Märschen auf einer gemeinsamen geraden Linie. Das logische Zurückführen zunächst nicht notwendig intuitiver Aussagen auf bestimmte intuitive Voraussetzungen – oder auf bereits bewiesene Sätze – ist das, was man in der Mathematik unter einem Beweis versteht. Der Ruf der besonderen Strenge und Exaktheit, in dem die Mathematik steht, verdankt sich genau dieser Beweiskultur, zu der auch eine weitgehende Einigkeit der Mathematiker über einen Satz intuitiv wahrer Voraussetzungen gehört, das sogenannte Axiomensystem – zumindest muss die Hinzunahme oder Ablehnung eines Axioms kenntlich gemacht werden. Wer dann aber den so bestimmten Beweis eines mathematischen Satzes nachvollzogen hat, der hat buchstäblich gesehen, warum der Satz richtig ist, hat den Zusammenhang zwischen Intuitivem und Nichtintuitivem gewissermaßen vor sich hingestellt. Ein Verb, das wörtlich „vor sich hinstellen" bedeutet – oder aber eine alte Perfektform von „sehen" –, verwendeten die alten Griechen für unser Wort „wissen".

Ohne Beweis kein Wissen, so ist es jedenfalls in der Mathematik. Dabei gibt es für ein Theorem in aller Regel mehrere Möglichkeiten, es zu beweisen. Für den Satz des Pythagoras nun gibt es sogar mindestens 365 verschiedene Beweise. So viele umfasst jedenfalls ein Buch, das Mario Gerwig, Mathematiklehrer am Gymnasium Leonhard in Basel, unlängst herausgebracht hat. Es handelt sich um eine üppig kommentierte, an manchen Stellen auch korrigierte Neuausgabe einer Sammlung, die der Amerikaner Elisha Scott Loomis (1852 bis 1940) zuerst 1927 veröffentlicht hatte. Aber warum? Reicht es nicht, den Satz einmal zu beweisen? Natürlich, die Sinnfrage kann man stellen, und Gerwig beantwortet sie ausführlich, nicht zuletzt unter dem Hinweis auf das mathematikdidaktische Potential vielfältiger Herangehensweisen an das berühmteste Theorem zur Demonstration, wie mathematisches Wissen in die Welt kommt. An den drei Beweisen aus Gerwigs Neuausgabe von Loomis' Sammlung, die auf dieser Seite vorgestellt sind, lässt sich aber auch besichtigen, wie unterschiedlich – und unterschiedlich lang – Beweise ausfallen können.

Bereits Elisha Loomis teilte seine Sammlung in algebraische und geometrische Beweise ein. Bei den algebraischen führen Sachverhalte wie Ähnlichkeiten von Teildreiecken oder Proportionalitäten von Strecken oder Flächen auf Gleichungen, aus denen sich schließlich das $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt. Die geometrischen Beweise arbeiten dagegen mit Unterteilungen von Flächen und dem Vergleich dabei gebildeter Teilflächen. Diese Unterscheidung ist insofern nicht übermäßig scharf, als man auch bei den algebraischen Beweisen nicht ohne geometrische Ausgangsüberlegungen und bei den geometrischen nicht ohne die Manipulation von Gleichungen auskommt. Doch dienten schon Loomis diese Aufteilung und ihre Untergliederung vor allem dazu, die Auffindbarkeit eines Beweises zu erleichtern. Gerwigs Buch gibt überdies „Leseempfehlungen besonderer Beweise", wobei die Besonderheit sich mitunter aus historischen Persönlichkeiten ergibt, auf die der betreffende Beweis zurückgeht oder denen er zugeschrieben wird, darunter natürlich Euklid, aber auch Leonardo da Pisa alias Fibonacci, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonardo da Vinci, der spätere amerikanische Präsident James Garfield oder die sechzehnjährige Schülerin Ann Condit.

Und Pythagoras? Nun, auch für den Satz des Pythagoras gilt das 1980 aufgestellte Gesetz des amerikanischen Statistikers Stephen Stigler, wonach keine wissenschaftliche Entdeckung nach ihrem eigentlichen Entdecker benannt ist – inklusive übrigens des stiglerschen Gesetzes, das in Wahrheit auf den Soziologen Robert Merton zurückgeht, wie Stigler einräumt – schon um damit die Selbstkonsistenz seines Theorems sicherzustellen. Tatsächlich gibt es unter den 365 Beweisen keinen, den man dem Pythagoras auch nur zuschreiben könnte.

Das liegt auch daran, dass man über diesen alten Griechen kaum etwas weiß. Obwohl – oder gerade weil – er im Altertum ungeheuer berühmt war, stammen die meisten überlieferten Informationen über ihn erst aus der Spätantike. Worauf sich die Gelehrten einigen können, ist, dass er um 570 vor Christus auf der Insel Samos geboren wurde und in seiner ersten Lebenshälfte wohl viel gereist ist: Milet, Syrien, Ägypten und Babylon werden als Stationen genannt. Schließlich gelangte er nach Kroton, einer der griechischen Kolonien in Unteritalien. Dort gründete er eine Schule, die später in das weiter nördlich in Lukanien gelegene Metapont umzog, wo Pythagoras um das Jahr 500 gestorben sein soll. Schriften des Pythagoras sind nicht nur keine erhalten, es hat wahrscheinlich nie welche gegeben. Seine Lehre wurde mündlich tradiert, innerhalb seiner Schule. Die war zeitweise auch politisch aktiv, trug aber zugleich Züge einer Religionsgemeinschaft oder gar einer Sekte, mit Seelenwanderung als einer zentralen Lehre und Pythagoras als der auch über seinen Tod hinaus verehrten Stifterfigur.

Schon Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.) erwähnt nie Pythagoras selbst, sondern nur „die Pythagoräer", und zu seiner Zeit waren Person und Werk des Meisters schon dick von Legenden überwuchert. Dazu gehört vielleicht auch schon jene, Pythagoras und seine Schule hätten das Wissen um die Existenz irrationaler Zahlen unterdrücken wollen. Der Pythagoräer Hippasos von Metapont soll wegen dieser Entdeckung – oder ihrer Verbreitung – von seinen Glaubensbrüdern sogar umgebracht worden sein. Allerdings gibt es in zeitgenössischen oder nur wenig jüngeren Quellen weder für die Ablehnung irrationaler Zahlen durch die Pythagoräer noch für den Fememord an Hippasos irgendeinen belastbaren Beleg. Sicher ist jedoch, dass Zahlen und Zahlenverhältnisse für das philosophische Weltbild der Pythagoräer von zentraler Bedeutung waren. Sie traten hier das Erbe der ionischen Naturphilosophen an, die nach einem Weltprinzip fragten und es im Wasser, in der Luft und schließlich in einem „Unbegrenzten" sahen. Für die Jünger des Pythagoras war das Weltprinzip im Wesentlichen mathematisch, eine Idee, die auch bei dem von ihnen beeinflussten Platon zu finden ist. Bei Platon, in seinem vermutlich Mitte der 380er-Jahre v. Chr. verfassten Dialog „Menon", ist bei den Griechen auch bereits die Kenntnis des heute sogenannten Satzes des Pythagoras belegt – zumindest eines Spezialfalles davon. Ob aber Pythagoras selbst den nach ihm benannten Satz gekannt oder gar bewiesen hat? Letzteres ist ungeklärt. Bewiesen in unserem heutigen Sinne, also durch das Zurückführen auf Axiome, hat ihn wohl erst Euklid um das Jahr 300 v. Chr. Gekannt hat Pythagoras seinen Satz aber ziemlich sicher – denn Menschen arbeiteten damit schon lange vor ihm.

Das weiß man allerdings erst, seit man um die Mitte des 19. Jahrhunderts lernte, akkadische Keilschrifttafeln zu entziffern. Denn unter diesen findet man bis zurück in die frühe altbabylonische Zeit um 1800 v. Chr. auch solche mit Listen von Dreiergruppen ganzer Zahlen a, b, c, welche die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, also 3, 4, 5 oder 6, 8, 10 oder 5, 12, 13 – sogenannte „pythagoräische Zahlentripel". In Keilschrifttexten sind auch Textaufgaben überliefert, die man mithilfe solcher Listen lösen konnte, wie etwa diese auf einer heute im Britischen Museum aufbewahrten Tafel: „4 ist die Länge und 5 ist die Diagonale. Was ist die Breite? Ihre Größe ist unbekannt. 4 mal 4 ist 16, 5 mal 5 ist 25. Du ziehst 16 von 25 ab und es bleibt 9. Wie viel mal was soll ich nehmen, um 9 zu bekommen? 3 mal 3 ist 9. 3 ist die Breite."

Aus derselben Zeit sind solche Textaufgaben auch aus ägyptischen Papyri bekannt. Etwa der möglicherweise noch vor 1800 v. Chr. verfasste Berliner Papyrus 6619 aus dem Mittleren Reich: „Die Fläche eines Quadrats ist 100, und es ist gleich der Summe zweier kleinerer Quadrate. Die Seite des einen ist die Hälfte plus ein Viertel der Seite des anderen." Gesucht sind dann die Seiten aller drei Quadrate. Wir können das heute auch algebraisch lösen. Die Ägypter aber dürften ausgenutzt haben, dass das pythagoräische Tripel 6, 8, 10 die beschriebenen Bedingungen erfüllt.

Im alten Ägypten gab es einen besonders guten Grund, sich mit pythagoräischen Tripeln zu beschäftigen, musste doch jedes Jahr das vom Nil überflutete Ackerland neu vermessen werden, wozu man eine Methode brauchte, auf freiem Feld in der Horizontalen rechte Winkel zu erzeugen. Wahrscheinlich geschah dies durch einen „umgekehrten Pythagoras": Statt ein rechtwinkliges Dreieck vorzugeben und aus zwei Seiten die dritte zu berechnen, nahm man ein Seil, das mittels Knoten oder Markierungen in zwölf gleiche Strecken unterteilt war. Dann hielt ein ägyptischer Landvermesser das Seil an beiden Enden zusammen, ein zweiter fasste es an der dritten und ein dritter an der vierten Markierung. Dann gingen die drei auseinander und spannten so das Seil zu einem Dreieck aus, das damit – weil die markierten Teilstrecken auf den drei straff gezogenen Seiten das pythagoräische Tripel 3, 4, 5 bildeten – notwendig ein rechtwinkliges war. Ob das allerdings bedeutete, dass die Ägypter das Theorem in seiner geometrischen Allgemeinheit kannten, also wussten, dass die Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sich immer zu dem Quadrat über der Hypotenuse addieren, ist unklar.

Bei den Griechen ist die bautechnische Bedeutung pythagoräischer Zusammenhänge nicht nur aus den Proportionen zahlreicher Gebäude ersichtlich, sondern auch aus zwei Bezeichnungen, die bis heute ihrer Sprache entlehnt sind: „kathetos" bedeutet wörtlich „herabgelassen" – gemeint ist ein Senkblei, dessen Faden mit der Waagerechten schwerkraftbedingt immer einen rechten Winkel einschließt –, und „hypoteinousa" ist „eine darunter Ausgestreckte". Schließlich war es dann auch spätestens ein Grieche, der das allgemeine Gesetz hinter den pythagoräischen Tripeln erkannte. Ob es nun tatsächlich Pythagoras selbst war oder erst einer seiner Schüler – diese Leistung sollte eine derart große Bedeutung erlangen, dass heute jedes Kind mit ihr zu tun bekommt.

Worin aber liegt heute diese Bedeutung? Verschiedenen Mathematikern oder mathematisch Interessierten wird da Verschiedenes einfallen. Günter Ziegler von der Freien Universität Berlin fallen etwa Koordinatensysteme ein. „Meiner Meinung nach ist er [der Satz des Pythagoras] von fundamentaler Bedeutung, weil er uns sagt, wie man in kartesischen Koordinatensystemen Abstände misst", schreibt Ziegler im Geleitwort zu Mario Gerwigs Buch. Und das nicht nur im Zweidimensionalen wie eingangs mit Paul und Paula. Auch in drei Raumdimensionen berechnet sich das Quadrat des Abstands zweier Punkte als Summe von Quadraten – nur dass es nun nicht mehr zwei sind, sondern drei. Und in Räumen mit mehr als drei Dimensionen, die nicht mehr visuell vorstellbar, aber zuweilen sehr nützlich sind, gilt dies ebenfalls.

Allerdings nur unter einer Voraussetzung, von der sich möglicherweise schon Euklid nicht so sicher war, wie intuitiv wahr sie wirklich ist: des sogenannten Parallelenaxioms. Es besagt, dass man durch einen außerhalb einer Gerade liegenden Punkt in der dadurch definierten Ebene nur eine einzige zweite Gerade ziehen kann, die zur ersten parallel ist. Jahrhundertelang hat man geglaubt, diese Aussage sei in Wahrheit ein Theorem, das sich aus den anderen Axiomen Euklids herleiten, also beweisen lassen müsste. Heute weiß man, dass dies unmöglich ist. Möglich aber ist es, das Parallelenaxiom wegzulassen – dann bekommt man aber ziemlich andere, sogenannte nichteuklidische Geometrien. Und in diesen gilt der Satz des Pythagoras nicht mehr.

Und doch, auch in einer nichteuklidischen Geometrie kann einem der alte Pythagoras noch nützen – nämlich indem man ihn geeignet verallgemeinert. Das hat sich unter anderem der Mathematiker Bernhard Riemann in der Mitte des 19. Jahrhunderts überlegt. Er dachte über eine Verbindung von Geometrie und Differentialrechnung nach. In Letzterer verwendet man gerne sogenannte infinitesimale, also unendlich kleine Größen und bezeichnet sie etwa bei räumlichen Betrachtungen mit dx, dy und dz. Auch wenn diese unendlich klein sind, könnten ihre Verhältnisse, also etwa dy/dx, endliche und tatsächlich sehr nützliche Größen sein. Ist der Raum euklidisch, gilt Pythagoras, und ein infinitesimaler Abstand ds berechnet sich über $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Riemann hat diese Formel verallgemeinert und eine Größe „g" eingeführt – die allerdings keine einfache Zahl mehr ist, sondern ein sogenannter Tensor. Zusammen mit dx, dy und dz ergibt dieses g nun einen infinitesimalen Abstand ds auch in nichteuklidischen Räumen – etwa auf einer gekrümmten Oberfläche.

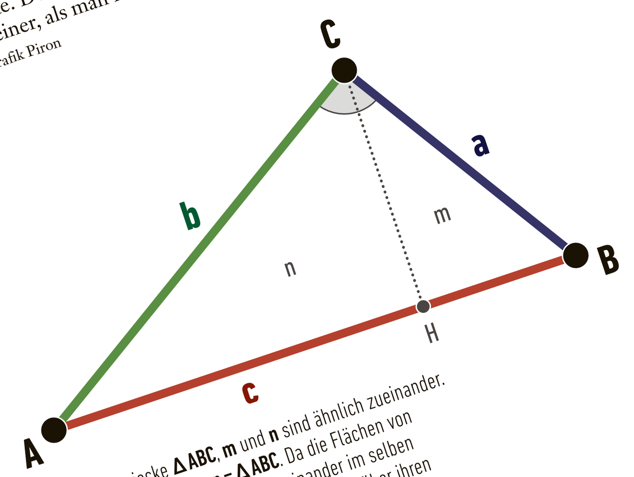
In dem g steckt also sozusagen die Information über die Abweichung vom euklidischen Fall – die Abweichung von Pythagoras. Das Ganze funktioniert auch in vier Dimensionen – mit der Zeit als vierter Dimension. Auch dann lässt sich mit g auch hier die Abweichung vom euklidischen Fall beschreiben, mithin die Krümmung der Raumzeit. Riemanns Arbeiten waren es, die Albert Einstein später in die Lage versetzten, seine allgemeine Relativitätstheorie, in der die Schwerkraft als Raumzeitkrümmung aufgefasst wird, mathematisch zu formulieren. Seither könnte man Paul und Paulas Abstand auch berechnen, wenn den beiden einfallen sollte, in der Umgebung eines schwarzen Loches wandern zu gehen – in gleich mehrfacher Hinsicht weit jenseits der Welt des Pythagoras.

Literatur: Mario Gerwig, „Der Satz des Pythagoras in 365 Beweisen. Mathematische, kulturgeschichtliche und didaktische Überlegungen zum vielleicht berühmtesten Theorem der Mathematik", Springer-Verlag Berlin 2021.

Es müssen nicht immer Quadrate sein.

Hier fällt man vom Punkt C aus das Lot auf die Hypotenuse AB. Das Lot trifft sie im Punkt H. Dadurch entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke BCH und AHC, die hier mit den Buchstaben m und n abgekürzt werden, um die Formeln übersichtlicher zu halten. Man arbeitet dann mit der Ähnlichkeit dieser Dreiecke sowie ABC zueinander. Interessant an diesem Beweis ist, dass er für alle einander ähnlichen Figuren gilt, die man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks errichten kann, nicht nur für Quadrate. Der Satz des Pythagoras erweist sich so als allgemeiner, als man ihn kennt.

F.A.Z.-Grafik Piron



Die Dreiecke $\triangle ABC$, **m** und **n** sind ähnlich zueinander. Außerdem ist $m + n = \triangle ABC$. Da die Flächen von drei ähnlichen Dreiecken zueinander im selben Verhältnis stehen wie die Flächen der über ihren jeweiligen Grundseiten errichteten Quadrate, gilt:

$\triangle ABC : m : n = c^2 : a^2 : b^2$

$\Rightarrow \frac{m}{a^2} = \frac{n}{b^2} = \frac{\triangle ABC}{c^2}$

$\Rightarrow a^2 = k \cdot m,\ b^2 = k \cdot n,\ c^2 = k \cdot \triangle ABC$

Also:

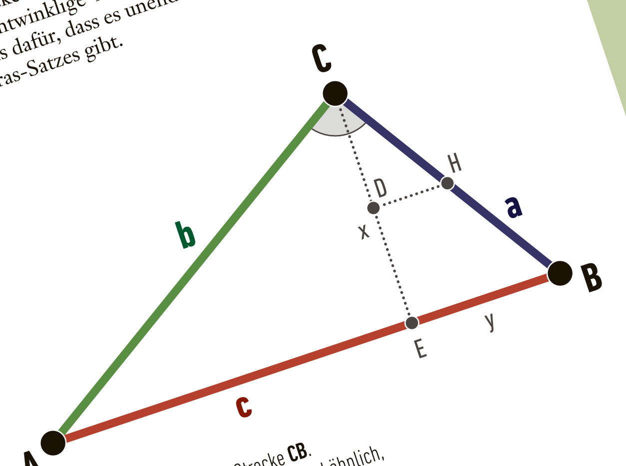
$\Rightarrow a^2 + b^2 = k \cdot m + k \cdot n = k \cdot (m+n) = k \cdot \triangle ABC = c^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

q.e.d.

Unendlich viele Pythagoras-Beweise

Wieder fällt man das Lot vom Punkt C auf die Hypotenuse AB. Die Mitte der kürzeren Kathete BC ist der Punkt H. Von ihm aus zeichne man eine Strecke parallel zur Hypotenuse. Nun nutzt man die Ähnlichkeit der so entstandenen Dreiecke, um Proportionen aufzustellen und daraus Gleichungen abzuleiten. Der Beweis funktioniert allerdings auch, wenn H nicht der Mittelpunkt von BC ist, sondern irgendein Punkt auf dieser Strecke. Denn es ergeben sich auch dann immer rechtwinklige Teildreiecke. Es ist damit auch ein Beweis dafür, dass es unendlich viele Beweise des Pythagoras-Satzes gibt.



Sei **H** der Mittelpunkt der Strecke **CB**. $\triangle ABC$, $\triangle AEC$, $\triangle CEB$ und $\triangle CDH$ sind ähnlich, und es gilt die fortlaufende Proportion:

$a : x : y : \left(\frac{y}{2}\right) = b : (c-y) : x : \left(\frac{x}{2}\right) = c : b : a : \left(\frac{a}{2}\right)$,

aus der sich 18 einfache Gleichungen ableiten lassen. Aus zwei dieser Gleichungen folgt die gewünschte Aussage direkt:

(1) $\frac{a}{y} = \frac{c}{a} \Rightarrow y = \frac{a^2}{c}$, einsetzen in (2) $\frac{b}{c-y} = \frac{c}{b}$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

q.e.d.

Da $\triangle ABC$ und $\triangle EFC$ kongruent sind, ist $EF = AB = AH$. Da außerdem $PC = PA$ ist, sind die Grundseiten der Dreiecke $\triangle PAH$, $\triangle CPE$ und $\triangle PCF$ gleich lang. Da die Flächen von Dreiecken mit derselben Grundseite im gleichen Verhältnis stehen wie die jeweiligen Höhen, gilt:

$\frac{\triangle CPE}{\triangle PCF} = \frac{ER}{FR}$, wobei $\triangle CPE = \frac{1}{2} \cdot \text{Re. } CSME = \frac{1}{4} \cdot \square CD$

und $\triangle PCF = \frac{1}{2} \cdot \text{Re. } CFNT = \frac{1}{4} \cdot \square CG$

Es folgt:

$\frac{\triangle CPE + \triangle PCF}{\triangle PCF} = \frac{ER + FR}{FR} = \frac{AB}{FR} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} \cdot \square CD + \frac{1}{4} \cdot \square CG}{\triangle PCF} = \frac{AB}{FR}$

Nun ist aber auch

$\frac{\triangle PAH}{\triangle PCF} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \square AK}{\triangle PCF} = \frac{AB}{FR}$, also ist $\frac{\triangle PAH}{\triangle PCF} = \frac{\triangle CPE + \triangle PCF}{\triangle PCF}$

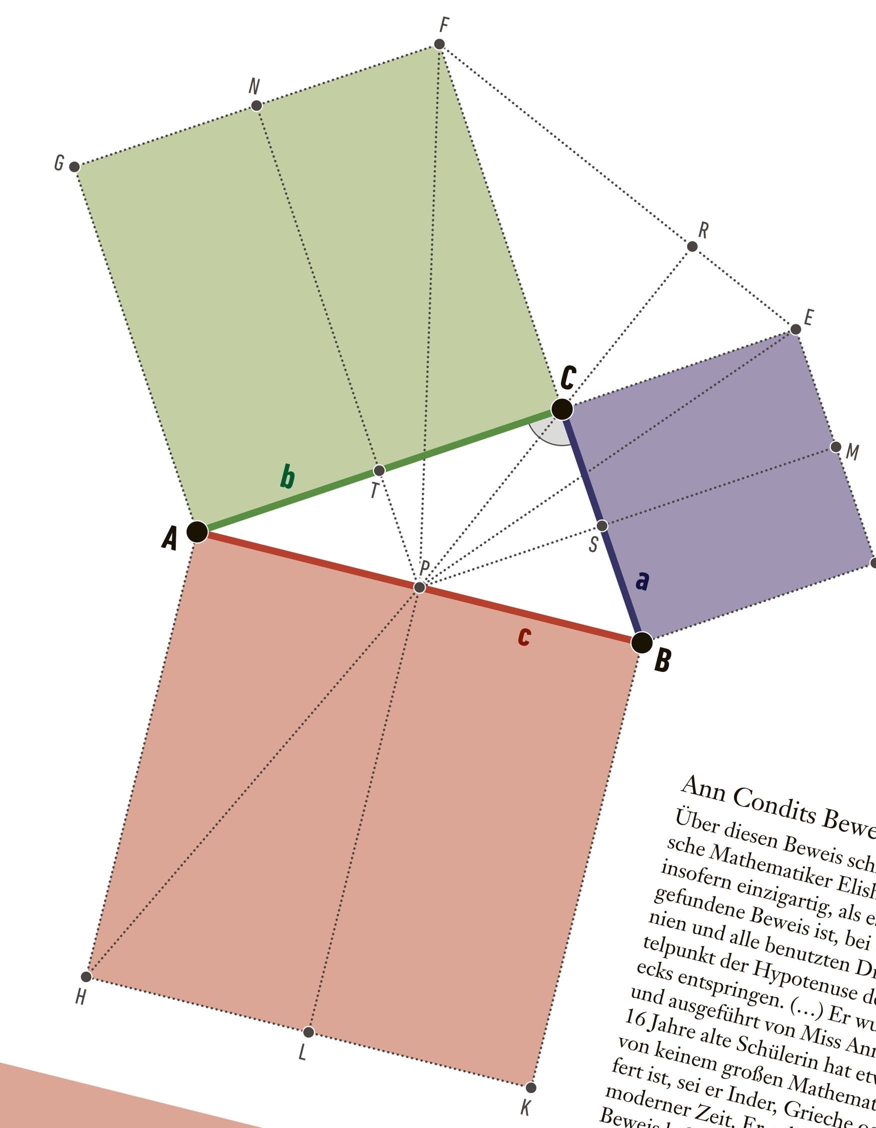
$\Rightarrow \triangle PAH = \triangle CPE + \triangle PCF$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \square AK = \frac{1}{4} \cdot \square CD + \frac{1}{4} \cdot \square CG$

$\Rightarrow \square AK = \square CD + \square CG$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

q.e.d.



Ann Condits Beweis

Über diesen Beweis schrieb der amerikanische Mathematiker Elisha Loomis: „Er ist insofern einzigartig, als es der erste jemals gefundene Beweis ist, bei dem alle Hilfslinien und alle benutzten Dreiecke am Mittelpunkt der Hypotenuse des Ausgangsdreiecks entspringen. (…) Er wurde entwickelt und ausgeführt von Miss Ann Condit. Diese 16 Jahre alte Schülerin hat etwas getan, was von keinem großen Mathematiker überliefert ist, sei er Inder, Grieche oder aus moderner Zeit. Er sollte als Ann-Condit-Beweis bekannt werden."

© Frankfurter Allgemeine Zeitung GmbH, Frankfurt. Alle Rechte vorbehalten. Zur Verfügung gestellt vom Frankfurter Allgemeine Archiv