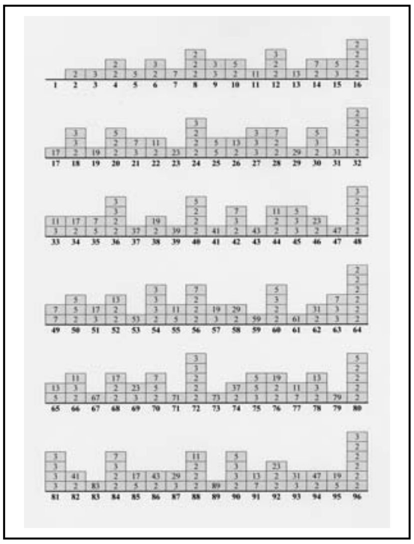
1	
2	2
3	3
4	2, 2
5	5
6	2, 3
7	7
8	2, 2, 2
9	3, 3
10	2, 5
11	11
12	2, 2, 3
13	13
14	2, 7
15	3, 5
16	2, 2, 2, 2
17	17
18	2, 3, 3
19	19
20	2, 2, 5
21	3, 7
22	2, 11
23	23
24	2, 2, 2, 3
25	5, 5
26	2, 13
27	3, 3, 3
28	2, 2, 7
29	29
30	2, 3, 5
31	31
32	2, 2, 2, 2, 2
33	3, 11
34	2, 17
35	5, 7
36	2, 2, 3, 3
37	37
38	2, 19
39	39
40	2, 2, 2, 5
41	41
42	2, 3, 7
43	43
44	2, 2, 11
45	3, 3, 5
46	2, 23
47	47
48	2, 2, 2, 2, 3
49	7, 7
50	2, 5, 5
51	3, 17
52	2, 2, 13
53	53
54	2, 3, 3, 3
55	5, 11
56	2, 2, 2, 7
57	3, 19
58	2, 29
59	59
60	2, 2, 3, 5
61	61
62	2, 31
63	3, 3, 7
64	2, 2, 2, 2, 2, 2
65	5, 13
66	2, 3, 11
67	67
68	2, 2, 17
69	3, 23
70	2, 5, 7
71	71
72	2, 2, 2, 3, 3
73	73
74	2, 37
75	3, 5, 5
76	2, 2, 19
77	7, 11
78	2, 3, 13
79	79
80	2, 2, 2, 2, 5
81	3, 3, 3, 3
82	2, 41
83	83
84	2, 2, 3, 7
85	5, 17
86	2, 43
87	3, 29
88	2, 2, 2, 11
89	89
90	2, 3, 3, 5
91	7, 13
92	2, 2, 23
93	3, 31
94	2, 47
95	5, 19
96	2, 2, 2, 2, 2, 3

2. PRIMZAHLEN – BAUSTEINE DER MULTIPLIKATION
Ein Lehrstück über das Nichtabbrechen der Primzahlfolge für die 9. Klasse des Gymnasiums



2.1 Einleitung

Primzahlen sind etwas Elementares und gleichzeitig Faszinierendes. Wie wir dem erfolgreichsten Werk der mathematischen Weltliteratur, den Elementen des Euklid entnehmen, haben sich schon vor mehr als 2300 Jahren die mathematischen Denker intensiv mit den Primzahlen auseinandergesetzt. Die Primzahl, die „πρωτος αρυθμος" (protos arythmos) definiert Euklid zu Beginn seines siebten Buches der „Elemente" als Zahl, die sich nur durch die Einheit messen lässt. Diese Primzahlen sind also die ersten, die wichtigsten, ursprünglichen Zahlen, die „Prototypen", wie die Elemente in der Chemie. Aus diesen multiplikativen Urbausteinen entsteht durch Synthese jede zusammengesetzte Zahl („συνθετος αρυθμος", synthetos arythmos). Die Erforschung der Primzahlen und ihrer Zusammengesetzten ist heute noch in vollem Gange, am populärsten ist die Suche nach immer grösseren Primzahlen mit Computern.

Beim Bruchrechnen stossen wir unweigerlich auf die Primzahlen und die Frage nach ihrer Anzahl drängt sich auf. Dass diese Frage aber so schön und einfach beantwortet werden kann und bereits vor über 2300 Jahren von Euklid in seinen Elementen beantwortet wurde, ist erstaunlich. Wir erkennen, wozu allein logisches Denken führen kann und wie ein Beweis durch Widerspruch geführt wird. Nicht umsonst belegt dieser Satz mit seinem eindrücklichen Beweis in der 1988 gestarteten Umfrage der führenden Fachzeitschrift „The Mathematical Intelligencer" auf der Suche nach den zehn schönsten mathematischen Sätzen den dritten Platz.

Wagenschein (1980, S. 228) würdigt diese Erkenntnis folgendermassen: „Der ebenso einfache wie geniale antike Beweis dafür, dass die Folge der Primzahlen niemals abbrechen kann, gehört zu den wenigen wirklich unentbehrlichen Stücken des mathematischen Lehrgutes. Ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen, lässt er erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken. Für die überhaupt dafür Empfänglichen ist das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens ein unvergessliches Erlebnis.“

2.2 Vorlagen von Martin Wagenschein und Wilhelm Werner

Wagenschein (ebd. 229): „Nur wer die Höhe gewann, weiss, was Höhe ist.“

Es gibt bei Wagenschein einige hochinteressante Beispiele, die darlegen, wie ein genetisch-exemplarischer Unterricht stattfinden könnte und sollte. Suchen wir aber die Beschreibung eines konkret durchgeführten Unterrichtsbeispiels aus dem Mathematikunterricht, so finden wir nur eines: „Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlenfolge“ (ebd. S. 228 - 236)

Dieser geniale antike Beweis ist bestens geeignet als Beispiel zu klären, was mit dem exemplarischen Lehren gemeint sein soll, denn er bedarf nur elementarster mathematischer Vorkenntnisse und ist ohne allzu grossen Aufwand erreichbar. Das Erlebnis des Erringens, die einfache Beweisführung und die Tatsache, dass wir hier über die Unendlichkeit eine zwingende Aussage machen können, dürfte doch vielen Schülerinnen und Schülern in bleibender Erinnerung haften.

Wagenschein liefert einen Bericht über den Weg, den das Unterrichtsgespräch 1949 an der Ecole d’ Humanité in Goldern nahm. Mit einer Gruppe von 13 Jungen und Mädchen im Alter von 14 bis 17 Jahren befasste er sich während 6 Stunden mit den Primzahlen, vermutlich eine Woche lang jeden Morgen 60 Minuten.

1. Stunde: Am Anfang setzt Wagenschein die Segel, das Thema wird sichtbar gemacht, die Verbindung zwischen Thema und Gruppe herausgestellt. Wie dies geschehen ist, wird leider nicht genauer berichtet. Früh muss jedenfalls bereits der Ansatz $2n \pm 1$ als Formel zur Bestimmung von Primzahlen aufgetaucht sein.
2. Stunde: Die Gruppe ist auf der Suche nach Primzahlen. Ein Schüler formuliert einen Satz (1): „Jede Primzahl hat die Form $6n+1$ oder $6n-1$.“ Zur Verifizierung dieses Satzes wird eine Primzahltabelle verteilt und durchmustert. (In der Anmerkung (ebd. S. 230) meint Wagenschein: „Besser wäre es gewesen, wir hätten sie selber gemacht.“) Bald einmal steht die Frage nach der letzten Primzahl im Zentrum. (Leider verschweigt er, wie diese Frage aufgetaucht ist.) Zur Klärung der Frage kann der erste Satz allerdings keinen Beitrag leisten; vielleicht hilft seine Umkehrung, der Satz (2): „Alle Zahlen der Form $6n \pm 1$ sind Primzahlen.“ Bereits mit $n = 4$ erweist er sich aber als falsch, denn $6 \cdot 4+1 = 25$ ist keine Primzahl.
3. Stunde: Dieser „falsche“ Ansatz wird durchleuchtet. $2 \cdot 3 \cdot n$ ist teilbar durch 2 und 3, deshalb ist $2 \cdot 3 \cdot n \pm 1$ weder durch 2 noch durch 3 teilbar. Ein neuer Ansatz taucht auf: $6p + 1$ (p sei Primzahl) soll eine neue (grössere!) Primzahl sein, z.B. $6 \cdot 5+1 = 31$, $6 \cdot 7+1=43$, $6 \cdot 11+1=67$, usw. ... Nach einigem hoffnungsvollem Probieren taucht mit $6 \cdot 29+1=175$ ein Versager auf, denn diese Zahl ist durch 5 teilbar.

Im Anschluss an diese Stunde und über Nacht gären diese Beispiele weiter und schon am Morgen kommt ein Schüler strahlend zum Frühstück: Ich hab’ die Lösung!

4. Stunde: Im Unterricht verkündet er Satz (3): Wenn p die grösste Primzahl ist, die ich kenne, dann ist $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p + 1$ (wobei das Pro-

$2 + 1 =$	3
$2 \cdot 3 + 1 =$	7
$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 =$	31
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 =$	211
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 =$	2311
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 =$	30031 ???

dukt *alle* Primzahlen bis p enthalten soll) bestimmt auch eine Primzahl, und zwar eine grössere als p!

Zustimmung! Das Rechnen geht los und die Proben scheinen die Behauptung zu bestätigen: Die letzte Zahl ist zu gross für die Primzahltabelle, wird aber wohl auch eine Primzahl sein. Wagenschein bleibt zögernd und mahnt zu schärfster Kritik und Prüfung.

Und wieder bringt es die Musse zwischen den Stunden: Am Morgen verkündet Gabi jubelnd, sie könne nun beweisen, dass es keine letzte Primzahl geben könne!

5. Stunde: Im konzentrierten Gespräch erweist sich, dass N zwar nicht unbedingt eine neue Primzahl ist, dass die Zahl N aber, wenn sie selbst keine neue Primzahl ist, zusammengesetzt ist aus neuen Primzahlen, die zwischen p und N liegen, wie das Beispiel 30031 = 59·509 illustriert. Und Marianne formuliert es so: „In *beiden* Fällen ist bewiesen, dass es keine letzte Primzahl gibt, da man dies weiterführen kann.“ Der erledigte Satz (3) bringt so die erstaunliche Wende. Zwar haben es erst wenige wirklich begriffen; aber indem es andere in ihren Worten ausdrücken, entstehen nach und nach neue Anhänger. Die Stunde endet damit, dass jeder Schüler den Beweis nochmals durchdenkt und auf seine Weise alles auf einen Zettel schreibt.
6. Stunde: Aus den einzelnen Niederschriften wird in der letzten Stunde um die gemeinsame Formulierung gerungen. Im Anschluss daran legt Wagenschein die entsprechende Formulierung des Satzes aus einer deutschen Übersetzung von Euklids „Die Elemente“ zum Vergleich vor. Es fehlt auch der Hinweis nicht, dass es nach wie vor keine Formel gibt, die *jede* Primzahl liefert und dass die Mathematik selbst wie die Folge der Primzahlen ohne Ende ist, indem ein Problem das andere wachruft.

Die Reaktionen im Nachhinein zeigen, wie gefesselt und aufgewühlt die Schülerinnen und Schüler ob dieser Fragen gewesen sein mussten und wie nachhaltig dieses Erlebnis wirkte.

Gute vierzig Jahre später greift Wilhelm Werner das Thema wieder auf. Seine Beschreibung liegt vor unter der Überschrift: „Primzahlen, nach Wagenschein. Eine Leiter bauen ins Unendliche“ (Berg/Schulze 1995, S. 153-179). Werner spielt an auf eine erste Durchführung in einer 6. Klasse, die er schliesslich als gescheitert betrachtet und beschreibt ausführlich eine zweite Inszenierung in einer 8. Klasse im Philippinum in Marburg.

1.-4. Lektion (Vorspiel: Vier Stunden Vorbereitung): Werner zweifelt an Wagenscheins Prämisse, dass dieser Beweis „ohne irgendwelche Vorkenntnisse vorauszusetzen“ erfahrbar sei. In einem Vorspiel widmet er sich deshalb der Wiederholung: Was ist ein Teiler? Wie gehen die Teilbarkeitsregeln? Was ist eine Primzahl? „Eine Zahl heisst Primzahl, wenn sie nur durch sich selbst und durch 1 teilbar ist.“ Wie geht die Primfaktorzerlegung? Was sind grösster gemeinschaftlicher Teiler (g.g.T) und kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches (k.g.V)? Was ist das Besondere an den Primzahlen? Diese werden bereits als unteilbare Bausteine aller natürlichen Zahlen erfahren.
5. Lektion, verkürzt wegen Notenbesprechung (Einstimmung und Abstimmung. Gibt es unendlich viele Primzahlen?): Heute geht’s zum Kern der Sache. Werner fragt bezüglich der Primzahlen: „Was meint ihr, gibt es unendlich viele davon oder hören sie irgendwo auf?“ Nach Unruhe und Meinungsdurcheinander folgt eine Abstimmung, die bei zwei Enthaltungen mit 10 : 10 unentschieden endet. Als Hausaufgabe sollen für beide Positionen Argumente gesucht werden.
6. Lektion (Die ersten Argumente. Der Keim des Euklidischen Ansatzes wird erkennbar): Die Ausgangslage ist spannend. Argumente werden mitgebracht, diese können aber die

Gegenseite nicht überzeugen. Nebst allgemeinen Begründungen gibt es ganz konkrete: „Mit 59 sei auch 159 eine Primzahl“ . . . 159 wird aber als Dreierzahl entlarvt. Ein anderer Schüler meint, mit 1001, 10001, 100001, . . . eine Folge gefunden zu haben: „Man müsse nämlich ausschliessen, dass die Zahlen durch 2 und 3 teilbar seien, und das sei ja hier der Fall.“ Zeitaufwändige Rechnung zeigt immer wieder, dass die Ansätze nicht genügen. Langsam dämmert aber die Einsicht, dass auch 5, 7 oder 11 Teiler sein könnten. Immerhin darf Werner am Schluss der Stunde feststellen: „Die Grundidee des Beweises, dass bei den Primzahlen die Teilbarkeit durch alle kleineren Primzahlen ausgeschlossen werden muss, zeichnete sich ab, ... “

7. Lektion („Import“ und eigene Leistung. Die „Lexikonfalle“ und das Sieb des Eratosthenes): Werner wird überrumpelt: Einige Schüler haben im Lexikon gelesen, es gebe unendlich viele Primzahlen. Bernhard bringt dazu eine noch falsch verstandene Begründung in die Runde, die dann aber nach längerer Diskussion zum formelmässigen Vorgehen wie bei Wagenschein führt:

$$\begin{aligned} 2\cdot3\cdot5 + 1 &= 31 \\ 2\cdot3\cdot5\cdot7 + 1 &= 211 \\ 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 + 1 &= 2311 \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Werner weicht jetzt vom begonnenen Prozess ab, und liefert den Schülerinnen und Schülern, wie er es sich in der Vorbereitung zurechtgelegt hat, mit dem Sieb des Eratosthenes ein Mittel, um einfach Primzahlen zu finden. Als Regel wird herauskristallisiert, dass auf einem Blatt mit den ersten n natürlichen Zahlen nur Vielfache der Primzahlen $\leq \sqrt{n}$ gestrichen werden müssen. Die Stunde endet mit dem Verteilen einer Tabelle der ersten 2500 Primzahlen.

8. Lektion (Neue Hoffnung und Enttäuschung. Der viel versprechende Ansatz scheitert): Einige Schüler und Schülerinnen haben zuhause die Tabelle angeschaut und waren erstaunt über die Vielfalt und die Unregelmässigkeit der Primzahlen. Deren Dichte nimmt bedeutend langsamer ab als erwartet. Im Chaos der Primzahlen tauchen Zwillinge (11 und 13, 17 und 19, 29 und 31, ...) auf als Faszinosum und ungelöstes Problem. Andere Schüler haben nachgeschaut und die errechneten Zahlen 31, 211 und 2311 als Primzahlen verifiziert. Nach der Wiederaufnahme dieses Gesprächs wird klar, dass für den Nachweis einer Primzahl ausgeschlossen wird, dass sie durch alle kleineren Primzahlen teilbar ist. Und Werner lenkt den Fortgang mit der Frage: „Was wäre gewonnen, wenn die Vermutung stimmt, dass es sich bei allen von Bernhards Zahlen um Primzahlen handelt?“ Es leuchtet ein, dass damit das Nichtabbrechen der Primzahlfolge bewiesen wäre. Die Überprüfung geht weiter mit $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 + 1 = 30031$. Die Primzahltabelle hört früher auf, also müssen wir die Teilbarkeit bis 173 überprüfen, denn 173 ist die grösste Primzahl kleiner als $\sqrt{30031} = 173.3$. Die Kontrollarbeit wird aufgeteilt, die Enttäuschung ist gross: 30031 ist Produkt von 59 und 509, beides Primzahlen.

9. Lektion eine Woche später (Das Feuer ist nicht erloschen. Die Wiederholung): Es dauert eine Lektion, um den Faden wieder aufzunehmen. Sonst eher schwächere Schüler übernehmen die Hauptlast der Wiederholung, einiges wird ausführlicher besprochen und Missverständnisse ausgeräumt. Die Stunde endet mit der Frage, ob mit den Trümmern noch etwas anzufangen sei.

10. Lektion (Glück im Unglück. Scheitern als Voraussetzung des Erfolgs): Einigen Schülern ist aufgefallen, dass ja *neue* Primfaktoren aufgetaucht sind.
Werner notiert an der Tafel:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 1 &= 7 \text{ PZ} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31 \text{ PZ} \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 211 \text{ PZ} \end{aligned}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311 \text{ PZ}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509 \text{ keine PZ}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = \ ?$$

„Welche Möglichkeiten gibt es denn für die nächste Zahl?“ Die Frage ist fast zu banal, führt aber nach längerem Überlegen zum Durchbruch. Es ist eine Primzahl, oder eine Zahl, die Primfaktoren enthält, die grösser sind als 17. Einige Schüler formulieren die Erkenntnis auf ihre Art. So setzt sich nach und nach die Erkenntnis durch. Das Ganze wird gemeinsam zusammengefasst und zuhause soweit verstanden aufgeschrieben. Mit einer sehr schönen Beweisniederschrift hört der Unterrichtsbericht auf. Ob wohl die verschiedenen Schülerfassungen in einer folgenden Lektion vorgelesen, verglichen und zu einer gemeinsamen Niederschrift optimiert wurden, wie dies Wagenschein eindrücklich beschreibt?

2.3 Struktur des Lehrstücks

Rund zehn Jahre nach der Inszenierung der Primzahlen durch Werner greife ich das Thema wieder auf, um ein Lehrstück für unser 9. Schuljahr am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld zusammenzustellen. Die Beschreibungen von Wagenschein und Werner werden zusammen mit Prof. Berg in Marburg und in der Berner Lehrkunstwerkstatt V mehrfach diskutiert.

Wagenschein beschreibt einen kompakten Kurs, den er mit einer kleinen Gruppe von Jugendlichen während sechs Stunden vermutlich in einer Woche durchführte. Zu Beginn setzt er die Segel, doch leider dürfen wir nicht erfahren, wie er dies in so kurzer Zeit geschafft hat. Werner ist der Ansicht, dass es vier Stunden Vorbereitung braucht, um die Vorkenntnisse bereitzustellen. Nach meiner Erfahrung liegen die Primzahlen den Jugendlichen recht fern und es braucht einige Zeit, um diese besonderen Zahlen erst im Raum präsent und in den Köpfen lebendig werden zu lassen. In diesem Sinne müssen meines Erachtens die Primzahlen erst ins Blickfeld geholt werden, müssen wir uns bei ihnen einwurzeln. Der Zahlenstrahl reicht nicht aus, um die Kernfrage ins Zentrum zu rücken. Die Abnahme der Primzahldichte ist nicht evident und warum sollen die Primzahlen nicht genau so ins Unendliche gehen wie die Quadrat- oder die Kubikzahlen? Darum denke ich, ist es angezeigt, dass wir uns gemeinsam auf die Suche nach Primzahlen begeben und uns eine Tabelle erarbeiten, wie es von Eratosthenes überliefert ist. Damit folgen wir der Anregung von Wagenschein: „Besser wäre es gewesen, wir hätten sie selber gemacht.“ Damit nehmen wir aber einen grossen Anlauf, wir bauen die vertraute Umgebung erst auf, in der die Kernfrage dann zwingend und herausfordernd entsteht. Wir springen nicht wie dies beim Pythagoras, beim Achilles, beim Barometer, … möglich ist, gleich zu Beginn in lockende Fluten.

Ist erst das Umfeld vertraut, die Kernfrage aufgelodert, dann kann der Findungsprozess in Gang kommen, wie er eindrücklich bei Wagenschein und Werner beschrieben ist. Erstaunlich ist, wie dieser Prozess immer wieder vergleichbar abläuft und fast jedes Mal durch Überraschungen genährt wird. Das Gären zwischen den Unterrichtsstunden, besonders im kompakten Kurs bei Wagenschein, macht diese Unterrichtseinheit auch für die Lehrkraft spannend und ein Stück weit unberechenbar. Bei Werner gefällt mir die vorläufige Meinungsumfrage, die besonders hilfreich ist, wenn sich Befürworter und Gegner des Abbrechens die Waage halten. Eindrücklich ist bei Wagenschein beschrieben wie nach und nach die Einwände und Bedenken schwinden, wie sich die Erkenntnis langsam aber unaufhaltsam durchsetzt. Und doch, erst die Hälfte kann sie auch richtig formulieren. Es folgt in der letzten Stunde die notwendige Optimierungsrunde, die abschliessend vertieft und klärt. Die gemeinsam erarbeitete Formulierung steht ebenbürtig neben derjenigen von Euklid. Sie darf sich dem Vergleich stellen. Ein Hinweis auf die indirekte Argumentationsweise sollte nicht fehlen. Zudem scheint mir zur Abrundung eine kurze Auseinandersetzung mit ein paar herausragenden gelösten und ungelösten Fragen rund um die Primzahlen angebracht. Damit soll erfahrbar werden, „dass die Mathematik selbst ohne Ende ist, indem ein Problem das andere wachruft.“ Und: „Es macht dem Anfänger grossen Eindruck zu hören, dass Fragen, die – als Fragen – jedes Kind verstehen kann, unlösbar schwierig sein können.“ (Wagenschein ebd. S. 235)

Für mein Lehrstück ergibt sich die folgende Struktur, die sich im Wechselspiel von Inszenierung und Analyse herauskristallisiert hat:

Ouvertüre: **Der Zahlenstrahl. Besondere Zahlen leuchten auf. Die Primzahlen.**
Am Zahlenstrahl befassen wir uns mit besonderen Zahlen wie gerade Zahlen, Dreierzahlen, Fünferzahlen, Quadratzahlen, Kubikzahlen, Primzahlen. Die einen erscheinen regelmässig, die andern nicht.

I. Akt: **Vertrauter werden mit den Primzahlen. Bei der Suche nach Primzahlen entdecken wir schöne Muster und das Sieb des Eratosthenes.**
Die Unregelmässigkeit der Primzahlen fordert heraus, unsere Zuwendung führt uns schliesslich zur systematischen Bestimmung der Primzahlen bis hin zu einer eindrücklichen bildlichen Darstellung, aus der sich die Kernfrage aufdrängt.

II. Akt: **Die Kernfrage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?“ Der lange Weg, das Scheitern und dann der unerwartete Durchbruch zum selbst gefundenen Beweis.**
Die Kernfrage ist gestellt, die Meinungen sind geteilt. Wenn nicht, so denken wir uns eine aussenstehende Person mit gegenteiliger Meinung, die überzeugt werden soll. Das Argumentieren beginnt. Verschiedene Vorschläge für Formeln tauchen auf; alle scheitern. Zwischendurch nehmen Verzweiflung und Resignation überhand. Schliesslich gelingt der unerwartete Durchbruch zur Erkenntnis.

Finale: **Die gemeinsame Formulierung als Höhepunkt und der Vergleich mit dem Beweis bei Euklid und Wagenschein. Ein Essay.**
Der Beweis konkretisiert sich und wird verdichtet in einer gemeinsamen Niederschrift. Jetzt verstehen wir auch die Versionen von Euklid und Wagenschein. Ein Essay rundet das Finale ab.

Nachspiel: **Geheimnisvolles und Besonderes rund um die Primzahlen.**
Einige besondere Hinweise und Aufgaben verweisen auf die rätselhaften Primzahlen und auf bisher ungelöste Probleme.

2.4 Unterrichtsverlauf: 12 Lektionen in der Quarta

Meine 9. Klasse 4A, die ich seit dem Sommer 2002 in Mathematik unterrichte, besteht aus 5 Mädchen und 17 Knaben. Im Grossen und Ganzen herrscht eine wohlwollende, angenehme Lernatmosphäre, so dass ich gerne in dieser Klasse unterrichte. Das Semester haben wir mit dem Lehrstück zum Satz des Pythagoras gestartet. Anschliessend haben wir uns einige Zeit den Zahlen und Mengen gewidmet: Ausgehend von den natürlichen Zahlen sind wir zu den ganzen Zahlen, zu den rationalen und irrationalen Zahlen weiter geschritten und haben auch die komplexen Zahlen erwähnt. Bevor wir uns in die Algebra mit den Bruchtermen begeben, möchte ich mit der Klasse einen Blick auf die Primzahlen werfen mit dem einfachen wie genialen Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir beginnen das Lehrstück am 31. Oktober und beenden es gute zwei Wochen später nach 12 Lektionen.

Das Lehrstück im zeitlichen Überblick:

Ouvertüre	I. Akt: Die Suche nach Primzahlen	II. Akt: Gibt es unendlich viele Primzahlen?	Finale: Beweis in Briefform	Nachspiel: Besonderheiten der Primzahlen
1/2 Lektion	4 1/2 Lektionen	3 Lektionen	1 Lektion	3 Lektionen

Lektionen 1/2

Ouvertüre:
Der Zahlenstrahl. Besondere Zahlen leuchten auf. Die Primzahlen

Die Stühle sind in zwei Reihen angeordnet. Auf dem Boden entrolle ich von einer Fadenspule ein Band mit den natürlichen Zahlen quer durch den Raum. Die Schülerinnen und Schüler schauen gespannt zu. Ich bemerke dazu: „Dies sind die natürlichen Zahlen, wir kennen sie ja bereits. Leopold Kronecker, ein deutscher Mathematiker, hat einmal gesagt: ‚Die ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.' Beim Zählen tauchen wir ja schon mitten in die natürlichen Zahlen hinein. Wir erinnern uns: Schon vor 2500 Jahren befassten sich die Pythagoräer intensiv mit diesen Zahlen und ihren mystischen Qualitäten. – „Was gibt es denn hier für besondere Zahlen?" Erwähnt werden gerade und ungerade

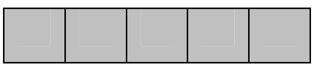
Zahlen, Dreierzahlen – alle kennen die Dreierreihe – Fünferzahlen, Quadratzahlen, Primzahlen, Kubikzahlen . . .

Hier öffnet sich das Feld nach verschiedenen Richtungen: Was sind die Kennzeichen der geraden Zahlen, der Dreierzahlen, der Viererzahlen, der Fünferzahlen, der Neunerzahlen, der Elferzahlen . . . Der Zahlenstrahl lässt sich durchschreiten in Zweier-, Dreier-, Vierer-, Elferschritten. „Das sind aber nur kleinere oder grössere

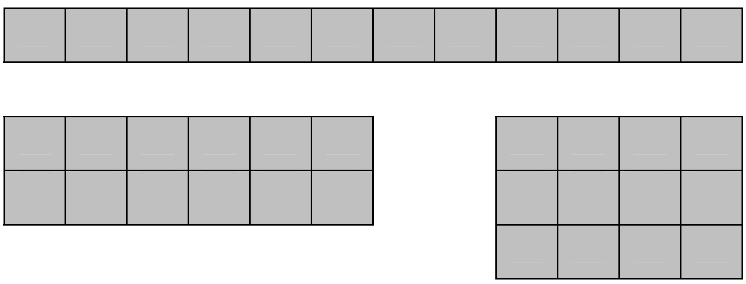
Wellen innerhalb der Zahlenreihe, die, einmal entstanden, eintönig weiterrollen.“ (Peter 1984, S. 61) Die Schüler rufen sich gegenseitig Teilbarkeitsregeln in Erinnerung. Wo finden wir die Quadratzahlen? Ihre Abstände werden immer grösser. Wir entdecken, dass sie von Abstand zu Abstand um zwei zunehmen, und dies bis in die Unendlichkeit. Und da sind ja noch die Primzahlen. Ist 1 auch eine Primzahl? Diese Primzahlen scheinen sehr unregelmässig verteilt, sie bergen Überraschungen und Geheimnisse. Wir finden Primzahlzwillinge (wie 11, 13 oder 17, 19) und „Primzahldrillinge“ (3, 5, 7). Wie bestimmt man Primzahlen und wie geht es weiter mit ihnen: Bricht ihre Folge ab oder gehen sie ebenfalls bis ins Unendliche wie die geraden Zahlen und die Quadratzahlen? Wenn diese Frage noch nicht hier auftaucht, dann sicher später. Ich bemerke: „In der Mathematik gilt die Zahlentheorie als Königsdisziplin und die Primzahlen bilden das Herzstück darin. Wir können an ihnen viel lernen an mathematischem Entdecken, Denken und Argumentieren. Darum werden wir uns in einem kurzen Lehrstück von etwa einem Dutzend Lektionen mit diesen Primzahlen befassen.“ Die natürlichen Zahlen sind ausgebreitet, mit 1 beginnend und sich ins Unendliche erstreckend. Mit verschiedenen Reihen sind die Primzahlen als Ursprung und Quellen erfasst, als multiplikative Vielfache dieser Urbausteine ergeben sich die zusammengesetzten Zahlen. Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen bedingen sich gegenseitig. Erste Strukturen sind im Blickfeld.

I. Akt: Vertrauter werden mit den Primzahlen. Bei der Suche nach Primzahlen entdecken wir schöne Muster und das Sieb des Eratosthenes.

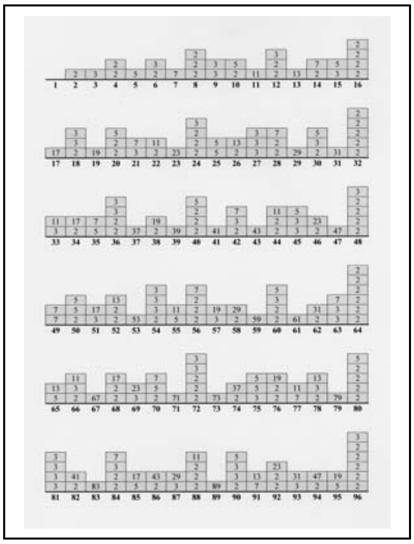
Um mit den Primzahlen etwas vertrauter zu werden, sammeln wir Bekanntes und Vermutungen. Es folgt das Übliche: „Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.“ – „Primzahlen braucht man beim Bruchrechnen für den grössten gemeinschaftlichen Teiler (g.g.T) und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache (k.g.V).“ Michael, einer der interessiertesten und aktivsten Schüler: „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“ Er hat das gelesen, weiss aber nicht, warum das so ist. Thomas: „Ein alter Grieche hat die Primzahlen ausgesiebt.“ Aber auch er weiss nicht mehr darüber zu berichten. Dafür erwähnt er noch die Primzahlzerlegung. – Ich erkundige mich konkret nach der Primzahlzerlegung von 72. „Man teilt durch die kleinste Primzahl 2, also 72 durch 2 ergibt 36, dann wieder durch 2 ergibt 18, dann wieder durch 2 ergibt 9 , solange das geht; dann teilt man durch 3 und erhält so: $72 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^2$ “ Ebenso zerlegen wir jetzt rascher: $60 = 2\cdot2\cdot3\cdot5 = 2^2\cdot3\cdot5$ Die Primzahlen erscheinen hier als multiplikative Bausteine der natürlichen Zahlen. Genauso lässt sich jede andere zusammengesetzte Zahl zerlegen. Erstaunlich ist, dass diese Primfaktorzerlegung eindeutig ist. Dies geht aber nur, wenn wir die 1 von den Primzahlen ausschliessen. Ich definiere deshalb etwas abweichend von der erwähnten Definition die Primzahlen als *natürliche Zahlen mit genau zwei Teilern*. Michael wendet ein, man müsste sagen: „Mit genau zwei verschiedenen Teilern.“ Ich nicke: „Genau so ist es zu verstehen.“ Zur Verdeutlichung der Definition und des Unterschieds zwischen Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen zeichnen wir an der Tafel rechteckige Flächendarstellungen von Zahlen im Quadratgitter.



$5 = 5\cdot1$



$12 = 1\cdot12 = 2\cdot6 = 3\cdot4$



Für zusammengesetzte Zahlen gibt es mehr als eine Rechteckdarstellung, für Primzahlen ist sie eindeutig. Bildlich ist diese Unteilbarkeit, diese Individualität der Primzahlen nebenstehend dargestellt! Die Primzahlen genügen sich selbst. Im Gegensatz dazu ist jede zusammengesetzte Zahl das Produkt einiger wohl bestimmter Primbausteine.

Zum vorherigen Beispiel ergänzen wir:
g.g.T(60,72) = 12 und k.g.V(60,72) = 360
Dies ist Grundlage für die nächste kleine Rechnung:

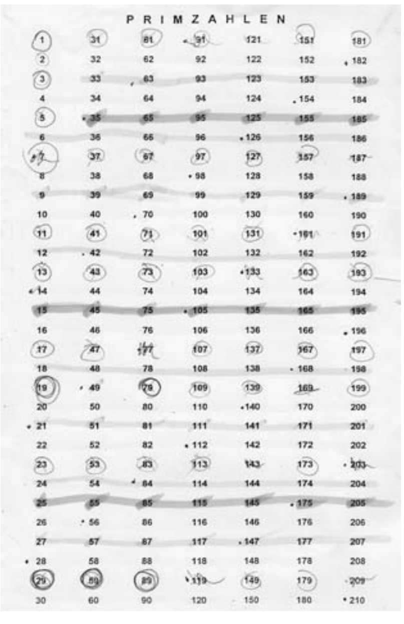
$$\frac{7}{60}+\frac{11}{72}=\frac{42}{360}+\frac{55}{360}=\frac{97}{360}$$ Sind wir damit fertig?

„Wir müssen sehen, ob sich dieser Bruch kürzen lässt.“ – „Nein“, ist die Antwort. Ich frage nach: „Warum nicht?“ – „97 geht nicht durch 2 , 3 , 5 , 7 ; 98 geht durch 7.“ Ich: „Müssen wir da nicht mit dem Überprüfen weiter fahren?“ Michael: „Nein, nur bis zur Wurzel dieser Zahl.“ Ich bin sehr erstaunt über diese Antwort und frage nach. „Mein Vater hat es gesagt.“ Als ob im Alter von 16 Jahren die Schüler ihrem Vater immer alles glauben würden! Erstaunlich, dass so etwas überhaupt zuhause zwischen Vater und Sohn Thema ist; sicher ein Einzelfall! Nach einer Weile des Nachdenkens erklärt er richtigerweise, dass, wenn wir durch eine Zahl grösser als Wurzel n teilen würden, der zweite Faktor bereits wieder kleiner als Wurzel n herauskäme.
Beispiel: $72 = 3{\cdot}24 = 4{\cdot}18 = 6{\cdot}12 = 8{\cdot}9 = 9{\cdot}8 = 12{\cdot}6\ \ldots$

P R I M Z A H L E N

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128
129	130	131	132	133	134	135	136
137	138	139	140	141	142	143	144
145	146	147	148	149	150	151	152
153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168
169	170	171	172	173	174	175	176
177	178	179	180	181	182	183	184
185	186	187	188	189	190	191	192
193	194	195	196	197	198	199	200

Wir begeben uns jetzt auf die Suche von Primzahlen. Jede Schülerin und jeder Schüler bekommt ein Blatt mit den natürlichen Zahlen von eins bis etwa zweihundert. Es sind Blätter mit verschiedener Anordnung der Zahlen: mit 8, 9, 10, 11, 12, 20, 30 Zahlen in einer Spalte oder Zeile. Möglichst systematisch sollen Primzahlen bestimmt werden; ohne Tabelle (Tobias blättert bereits in der gelben Formelsammlung!) und ohne Taschenrechner. Primzahlen sind mit Bleistift zu umrunden. Die Klasse verteilt sich auf die vorbereiteten kleinen Tischgruppen. Es geht zügig voran. In zwei Gruppen wird systematisch abgestrichen, in anderen wird Zahl um Zahl unter die Lupe genommen. Zwischendurch gongt es. Pause? Wir arbeiten weiter mit Aussicht auf frühere Beendigung der zweiten Lektion. Nach ca. 10 Minuten, noch keine Gruppe ist fertig, rufe ich alle in die Runde, um den Zwischenstand auf den Blättern zu präsentieren. Da und dort sind Muster sichtbar. Es wird erkannt, dass wegen der unterschiedlichen Anordnung der Zahlen auf den Blättern auch unterschiedliche Muster erscheinen. Z.B. lassen sich die geraden Zahlen einmal auf vertikalen, einmal auf geneigten, ein andermal auf horizontalen Linien wegstreichen.



Michael ist wieder rasch. Er hat rechts oben die 12; deshalb lassen sich die Vielfachen von 2, 3, 4 und 6 in vertikalen Linien abstreichen. „Von welchen Zahlen müssen wir auch noch die Vielfachen abstreichen?“ Michael: „Bis zur Wurzel von etwa 200.“ Die genaue Zahl wird nicht genannt. Ich lasse dies und baue auf die Erfahrungen, die kommen werden. Ich bitte die Schülerinnen und Schüler weiterzuarbeiten, und Vielfache möglichst mit verschiedenen Farben abzustreichen.

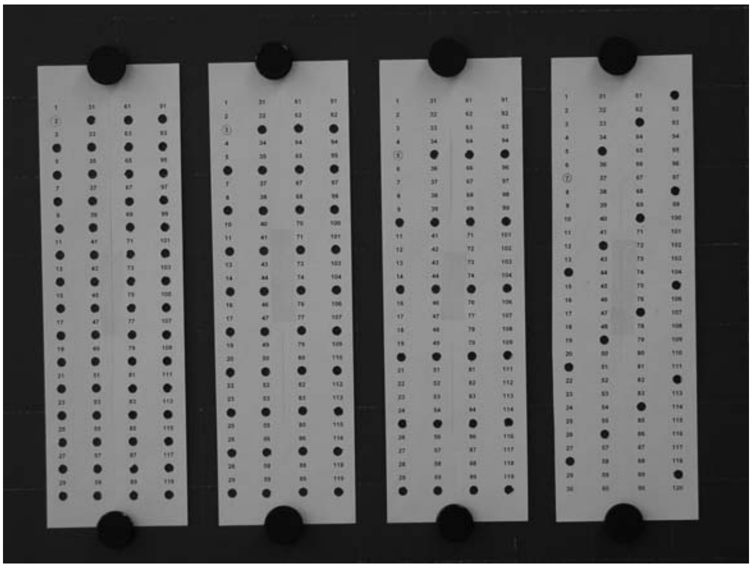
Nach einiger Zeit sind die ersten Schüler fertig. Die Anzahl der Primzahlen wird auf dem Blatt notiert. Unterschiedliche Anzahlen werden festgestellt: 50, 48, 53, 46. Ich werde gefragt, wie viele es seien, weiche aber der Antwort aus. Der Unterschied wird vorerst mit der unterschiedlichen Anzahl natürlicher Zahlen (zwischen 200 und 210 Zahlen) auf den Blättern begründet. Allerdings erweist sich dies nicht als der wahre Grund. Beim Vergleichen werden die Fehler entdeckt und schliesslich stehen 46 Primzahlen auf jedem Blatt. Die ersten 46 Primzahlen von 2 bis 199 und damit der Anfang einer Primzahltabelle sind gefunden! (Nach grosser Lücke folgt die nächste Primzahl erst mit 211!)

Kaum sind mehrere Gruppen fertig, rufe ich die Klasse wieder in den Kreis zusammen. Wir legen die Blätter in die Mitte und vergleichen. Ich erläutere, speziell an Thomas gerichtet: „Mit diesem Abstreichen haben wir das erwähnte Sieb des Eratosthenes vor uns. Dieser Grieche, Eratosthenes von Kyrene, wirkte im 3. Jahrhundert vor Christus (275 – 194 v. Chr.), also etwas nach Euklid, als Geograph, Mathematiker und Vorsteher des Museions in Alexandria.“ *In einer nächsten Inszenierung werde ich an dieser Stelle bereits mein Modell präsentieren, das die Siebeigenschaft des Verfahrens veranschaulicht.* Stattdessen kündige ich jetzt unser grosses Gemeinschaftswerk an: „Unter den ersten gut 2000 natürlichen Zahlen wollen wir alle Primzahlen bestimmen. Welche Blatteinteilung ist wohl am besten geeignet?“ Als erste, vorschnelle Antwort: „Das Blatt mit den 10 Spalten.“ Auf meine konkrete Nachfrage wird die 30er-Einteilung bevorzugt, da dort die 2er-, 3er- und 5er-Zahlen durch horizontale Linien sofort abgestrichen werden können. „Wir werden uns an die 30er-Einteilung halten und uns auf ein gemeinsames Abstreichverfahren einigen, damit am Schluss ein schönes, übersichtliches Gemeinschaftswerk entsteht.“ Um nicht in allzu grosse Zahlen hineinzugeraten, verteile ich von jedem Blatt zwei Exemplare. Da sich auf jedem Blatt $7 \cdot 30 = 210$ Zahlen befinden, erfassen wir so alle Primzahlen kleiner als $11 \cdot 210 = 2310$. Für die ersten Zahlen legen wir die Farben fest. Die Beschreibung der geneigten Linien mit z.B. „eins nach rechts und 2 nach oben“ folgt bald einmal. Wie selbstverständlich kommt also so etwas wie ein Steigungsdreieck ins Spiel. So legen wir bis 31 alles fest. Da die Zeit um ist, bitte ich die Schülerinnen und Schüler auf den nächsten Tag wenigstens die 2er, 3er, 5er und 7er abzustreichen. Morgen kann es weitergehen.

Drei Schülerrückmeldungen zu dieser ersten Doppellektion:
Toni (3, vgl. S. 90): „Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinkamen und mit ganz einfachen Beispielen begannen.“ Manuel (14): „Von mir aus gesehen ein guter Einstieg in die Primzahlen. Weckte bei mir Interesse an den Primzahlen.“ Lisa (12): „Guter Einstieg! Man konnte gerade am Anfang selbständig ausprobieren und seine Ideen testen.“

Bei diesem Einstieg treten die Primzahlen bereits als besondere Zahlen im Meer der natürlichen Zahlen deutlich hervor. Ihre Bedeutsamkeit und Unregelmässigkeit fordern heraus. Die Kernfrage, ob es endlich viele Primzahlen gibt, stellt sich natürlicherweise als Leitfrage.

„Gestern haben wir das Primzahlsieb wieder entdeckt, das vom Griechen Eratosthenes von Kyrene im 3. Jahrhundert vor Christus beschrieben wird. Es dient zum Auffinden von Primzahlen. Damit das Sieb besser zum Ausdruck kommt, habe ich Lochschablonen angefertigt.“



Ich zeige den ersten Zahlenstreifen, auf dem alle geraden Zahlen grösser 2 mit kleinem Instrument weggelocht sind. Auf dem Hellraumprojektor liegt das Blatt mit den ersten 210 natürlichen Zahlen. Die 1 fällt als Primzahl ausser Betracht. Die 2 ist also unsere erste Primzahl und wird eingekreist. Jetzt können wir alle Vielfachen davon aussieben. Ich lege meinen ersten Papierstreifen hin. Sichtbar durch die Löcher sind nur noch die geraden Zahlen ab 4. Diese fallen durch das Sieb. Mit einem Filzstift kann ich diese jetzt markieren und das Papier wieder wegnehmen. Die nächste nicht markierte Zahl ist die 3, sie wird umrahmt als zweite Primzahl. Dann folgt mein nächster Siebstreifen usw. So werden nach und nach die zusammengesetzten Zahlen „ausgesiebt“, übrig bleiben nur noch die Primzahlen. Um die 25 Primzahlen im ersten Hunderter zu bestimmen braucht es nur die vier Siebe bis zum Siebnersieb, die Vielfachen von 11, 13, … sind damit nämlich gemäss unserer Wurzelregel bereits gestrichen!

Jetzt kann ich die Klasse weiter arbeiten lassen. Ein Schüler hat sein Blatt nicht dabei und drei andere gestehen, dass sie bereits Fehler gemacht haben. Also gehe ich rasch weitere Blätter vervielfältigen, um den Prozess in Gang zu bringen. Michael fragt dazwischen, warum bei ihm und bei seinem Nachbarn die siebte Zahl auf dem Blatt eine Siebenerzahl, aber die elfte Zahl keine Elferzahl ist? – Nach kurzem Nachdenken wird es ihm klar. Weil es auf jedem Blatt 210 Zahlen hat, und diese Zahl durch 7 teilbar ist, lassen sich die letzte Zahl von jedem Blatt und damit die siebte Zahl des folgenden Blattes durch 7 teilen. Nicht so aber bei den Elferzahlen. Toni möchte wissen, ob es auf jedem Blatt gleich viele Primzahlen hat. Er vermutet: „Wohl schon, da auf jedem Blatt gleich viele Zahlen stehen.“ Raffael merkt, dass er noch ein Vielfaches von 37 auf seinem Blatt hat, ebenso eines von 41. Wir haben bis dahin ja nur bis zur Reihe der 31er Zahlen abgestrichen. Da er sonst fertig ist, bitte ich ihn und seinen Nachbarn Thomas, herauszufinden, welche andern zusammengesetzten Zahlen ebenfalls noch auf den Blättern abzustreichen seien. Es läutet, aber die Klasse arbeitet weiter, erst nach ein paar Minuten fragt ein Schüler, ob sie Pause machen dürften.

In der folgenden Lektion, der vierten unseres Lehrstücks, vervollständigen Raffael und Thomas die Liste der noch zusätzlich abzustreichenden Zahlen:
37·43 ; 41·41 ; 43·43 ; 47·47 ; 43·47 ; 37·43 ; 37·41 ; 37·37 ; 37·59 ; 37·53 ; 43·53 ; 37·61.
Schade: Die fehlende Systematik verhindert zu sehen, ob dies wirklich alle sind.

Nach und nach werden die Blätter mit Magneten an die Tafel gehängt. Da jedes Blatt zweifach bearbeitet ist, können die Schülerinnen und Schüler jetzt vergleichen. Insbesondere soll auch die Anzahl der Primzahlen auf dem Blatt notiert werden. Mitte Stunde zückt Tobias seine dicke Formelsammlung, in der die Primzahlen tabelliert sind. Einen Ausdruck davon habe ich bereit und hänge ihn an die Tafel. Kopien liegen bereit. Die Tabelle basiert auf ähnlichem Prinzip wie unsere Blätterserie und ist somit leicht verständlich.

Ich lasse noch kurz Zeit für Fragen bezüglich der am Montag stattfindenden Probe über Zahlmengen. Erstaunlicherweise sind kaum Fragen da und so wird an den Blättern weitergearbeitet. Gegen Ende der Stunde sind die meisten Blätter bearbeitet, auch wenn ich nicht sicher bin, dass alle die Problematik mit den zusätzlichen zusammengesetzten Zahlen schon verstanden haben. Zum Abschluss bitte ich die Schülerinnen und Schüler zu notieren, was ich am Vortag an die Tafel geschrieben habe. Michael möchte noch wissen, warum die Teilbarkeitsregel für die 11 funktioniert. Ich vertröste ihn auf das nächste Mal.

Einige Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern zu dieser zweiten Doppellektion:
Fritz (20): „Es ist interessant, solche Geheimnisse' zu entschlüsseln." – Manuel (14): „Mit dem Sieb wurde das Verfahren verbildlicht (tolle Idee)." – Tamina (9): „Die durchlöcherten Papierstreifen fand ich gut, aber das mit dem Abstreichen fand ich mühsam, vielleicht lag es daran, dass ich so hohe Zahlen hatte (2100-2300)." – Marina (5): „Ich habe es komisch gefunden, dass die Primzahlen keine richtige Reihenfolge haben."

Das Abstreichen führt zum Erlebnis, wie einfach und rasch die ersten Primzahlen ermittelt werden können. Für die Blätter mit grossen Zahlen ist es allerdings etwas mühsamer. Auch ist noch lange nicht allen Schülerinnen und Schülern klar geworden, welche Zahlen zusätzlich abgestrichen werden müssen. Das Gemeinschaftswerk nimmt aber gute ästhetische Form an und wird uns als eigenhändig erstellte Primzahltabelle dienen. Zudem zeigt sich jetzt schon, dass es nicht auf jedem Blatt gleich viele Primzahlen hat.

Lektionen 5/6

In den ersten 60 Minuten schreibt die Klasse die angekündigte Probe über die Zahlmengen. Dadurch wird die zweite Mathematiklektion von heute stark verkürzt. Vorerst greife ich Michaels Anliegen, die Teilbarkeit durch 11, nochmals auf. Raffael erinnert sich: „Jede zweite Ziffer zählen wir zusammen. Die beiden Summen müssen übereinstimmen oder um ein Vielfaches von 11 verschieden sein." Zur Verdeutlichung beobachten wir, was bei der Multiplikation mit 11 passiert, wie sich die Anzahl der Einer (E), der Zehner (Z), der Hunderter (H) und der Tausender (T) verändert. Beim Übertrag (letztes Beispiel!) zeigt sich, dass die eine Position um 10 verkleinert, die Nachbarposition davor aber um 1 vergrössert wird, d.h. der Unterschied der Summen wächst um 11 !

Beispiele:	**T H Z E**	**T H Z E**	**T H Z E**
	1 3 2 x11	3 2 5 x11	6 2 8 x11
	1 3 2	3 2 5	6 2 8
	1 4 5 2	**3 5 7 5**	**6 8 10 8** also **6908**
	(1 + 5 = 4 + 2)	(3 + 7 = 5 + 5)	(6+0 = 9+8 – 11)

Die Beispiele verdeutlichen die Regel. Dann bitte ich die Schüler, im Taschenrechner eine siebenstellige Zahl einzutippen, mit 11 zu multiplizieren und unsere Regel anzuwenden. *Besser wohl würde man dies schriftlich rechnen lassen!*

Anschliessend folgt dazu eine kleine Zahlenzauberei (vgl. dazu Martin Gardner: Spektrum der Wissenschaft, Nov. 1998). Ich bitte jede Person im Taschenrechner eine dreistellige Zahl einzugeben und die drei Ziffern in der Eingabe zu wiederholen, z.B. 295295. Ich behaupte, diese Zahl sei durch 11 teilbar. Alle bestätigen dies, ausser Michael, der die beiden Zahlen multipliziert hat. Ich behaupte weiter, das Resultat sei durch 13 teilbar, und das neue Resultat durch 7. David stellt als erster fest, dass die ursprüngliche Zahl wieder erscheint. Erstaunlich schnell merken einige, dass dahinter die Zahl 1001 = 7 x 11 x 13 steckt. Tobias meint, man könnte es auch mit einer fünfstelligen Zahl probieren, das Resultat wäre durch 11 teilbar. Er verallgemeinert sogar, es könnte eine beliebige Zahl mit ungerader Anzahl von Stellen sein und begründet richtig! Die Teilbarkeit durch 7 und 13 ginge allerdings verloren! Erfreulich, wie da mathematisch weitergedacht wird!

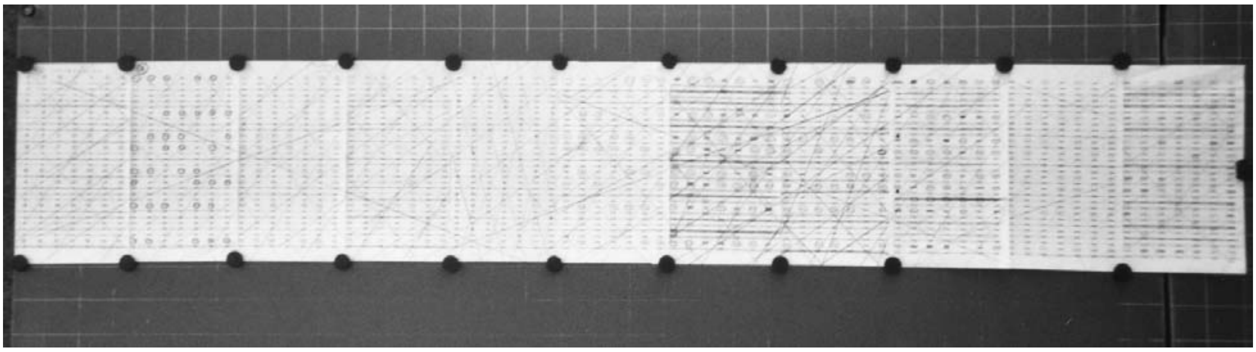
In der sechsten Lektion unseres Lehrstücks hängen wieder unsere Primzahlblätter an der Tafel und darunter die Anzahl der Primzahlen jedes Blattes:

46 35 33 32 30 29 27 31 27 27 26

Raffael P. und Thomas hatten das letzte Mal bereits diejenigen Zahlen an der Tafel notiert, die noch zusätzlich abgestrichen werden müssen. Um Übersicht zu schaffen lasse ich diese Zahlen in einer Tabelle an der Tafel notieren und so wird klar, warum genau diese Zahlen noch abgestrichen werden müssen. Zudem zeigt es sich, dass den beiden das letzte Mal eine der Zahlen entgangen war.

	37	41	43	47	53	59	61
37	1369	1517	1591	1739	1961	2183	2257
41		1681	1763	1927	2173	(2419)	
43			1849	2021	2279	(2537)	
47				2209	(2491)		

Damit haben wir alle 501 Primzahlen kleiner als 2310 bestimmt. Das farbige Gemeinschaftswerk hängt vor uns, eine leuchtende Darstellung des Siebs von Eratosthenes.



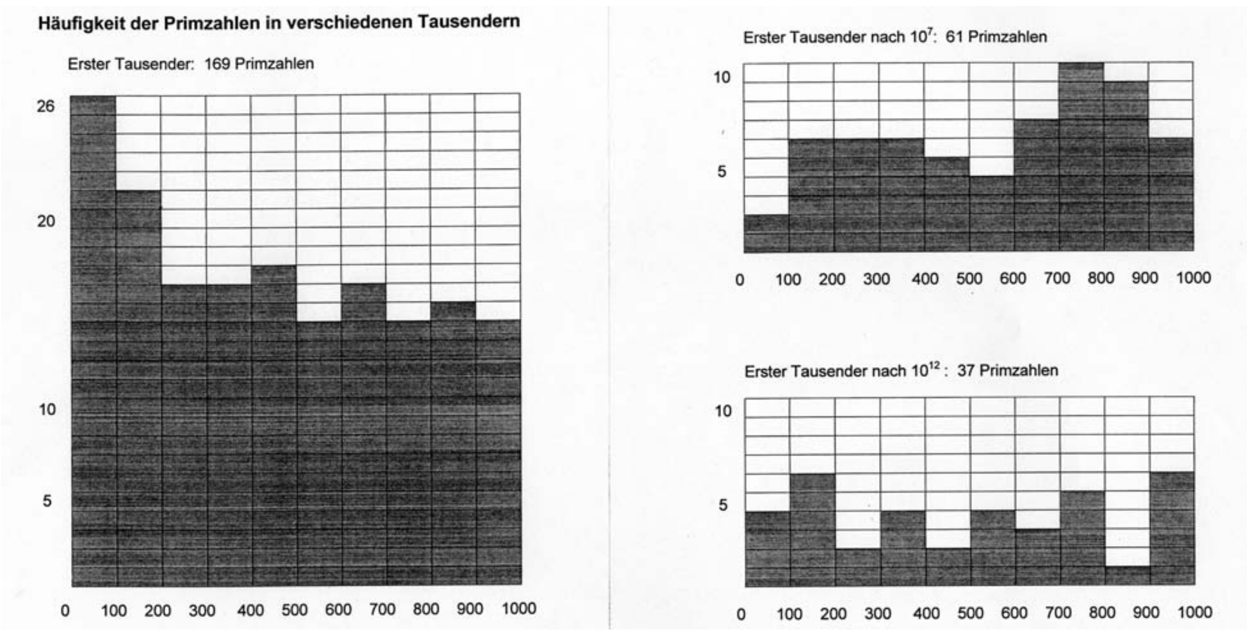
Rückmeldungen aus der Schülerschaft: Alissa (10): „Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!“ Marino (6): „Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren.“ Die Teilbarkeitsregel und die Zahlenspielerei regen offenbar zum Weiterdenken und Experimentieren an. Was kann uns besseres passieren?

II. Akt: Die Kernfrage „Wie viele Primzahlen gibt es?“ Der lange Weg, das Scheitern und dann der unerwartete Durchbruch zum selbst gefundenen Beweis.

Ich zeige auf unser Gemeinschaftswerk an der Tafel. „Jeder Primzahl entspringt ein Strahl, wie ein Laserstrahl, und durchleuchtet den Rest des ganzen Zahlenraumes. . . . Und wie geht das weiter mit diesen Lichtquellen, mit den Primzahlen?“ Tobias: „Die Primzahlen nehmen immer ab! Sie werden immer seltener.“ Michael kritisch: „Warum so unregelmässig, dazwischen haben wir wieder ein Blatt mit mehr Primzahlen als vorher, 31 gegenüber 27.“ Marino: „Das hört einmal auf.“ Ich mache eine kurze Umfrage: 15 glauben, dass die Primzahlen nicht aufhören; einer denkt, dass sie aufhören, ein paar Enthaltungen. Einige davon neigen eher zur Endlichkeitsaussage. Michael will wissen, auf welcher Seite ich stehe. Im Moment äussere ich mich nicht dazu. Thomas: „Die Zwischenräume werden immer grösser. Also muss es unendlich viele Primzahlen geben.“ Eine interessante Begründung! Michael schmunzelnd: „Von Unendlich kennen wir die Wurzel nicht, also muss es unendlich viele Primzahlen geben.“ Sämi: „Vielleicht hat es unendlich viele Primzahlen, aber wir wissen es nicht, können es nicht beweisen.“ Noch jemand hakt nach: „Wir können es nicht wissen.“ Bemerkenswert diese Antwort: Es gibt also Schüler, die glauben, gewisse mathematische Dinge könnten wir nicht wissen. Wie modern das für einen Mathematiker tönt!

Ich zeige eine graphische Darstellung mit Angaben über die Abnahme der Primzahlen. Es gibt

im ersten Tausender insgesamt 169 Primzahlen,
pro Hunderter 14 bis 26 Primzahlen,
im ersten Tausender nach einer Million 62 Primzahlen,
pro Hunderter noch 2 bis 10 Primzahlen,
im ersten Tausender nach einer Billion 37 Primzahlen,
pro Hunderter noch 1 bis 7 Primzahlen.



Die Primzahlen werden also immer seltener. Aber ob sie wirklich aufhören? Ob es eine letzte Primzahl gibt? Ich versuche Mut zu machen: „Wir können es herausfinden, wir können sogar

beweisen, wie es sich verhält. Schon vor 2300 Jahren hat ein Grieche dazu einen Beweis geliefert.“
Fritz liefert den ersten guten Ansatz: „Wir sollten überlegen, was wir abstreichen können: alle geraden Zahlen, alle Dreierzahlen, . . .“ Ich: „Können wir konkreter werden?“ Fritz: „Wir können Vielfache ausschliessen: $2{\cdot}3 = 6$, $2{\cdot}7 = 14$, $2{\cdot}3{\cdot}5 = 30$“ Ich denke: „Dieser Ansatz mit dem Ausschliessen wird uns noch weiterhelfen.“ Ich beobachte, wie Marina und Manuel, zwei die im Mathematikunterricht eher am Rande stehen, zusammen diskutieren. Sie glauben, dass es zwischen den Strahlen immer wieder Löcher hat, können es aber nicht begründen. Ich versuche zu verunsichern: „Aber nach 1000 Primzahlen hat es durch jedes folgende Blatt mindestens 1000 Strahlen. Und da soll noch etwas übrig bleiben?“

Das Problem ist lanciert. Michael kündigt bereits an, dass er der Sache nachgehen will. Ich muss nächstes Mal auf alles gefasst sein. In der École d’Humanité diskutieren und grübeln die Schülerinnen und Schüler abends und in der Nacht weiter, hier ist es eher so, dass sie auf dem Internet nach Unterstützung suchen. Oder wird Michael den Vater befragen? Ich bin sehr froh, dass es an dieser Stelle einen Unterbruch gibt. Erste Ansätze und viel Verunsicherung sind vorhanden; in der Zwischenzeit kann das Problem gären. Natürlich muss ich damit rechnen, dass in der nächsten Stunde ein neuer Lösungsansatz daherkommt. Dass jemand den Beweis in seiner ganzen Klarheit mitbringt, ist mir in meinen bisherigen sechs Durchführungen nicht passiert.

Lektionen 7/8

Unser Gemeinschaftswerk präsentiert sich vor uns an der Tafel. Es gilt den Faden vom Montag wieder aufzunehmen, und festzustellen, wo die einzelnen und die ganze Klasse in der Beschäftigung mit den Primzahlen stehen. Dabei erhalten wir eine Standortbestimmung als neue Plattform. Von da soll sich der Prozess wieder neu in Gang setzten. "Wir haben das Sieb des Eratosthenes entdeckt, mit geraden Linien die Vielfachen der Primzahlen durchgestrichen. Es hat immer mehr Linien wie Laserstrahlen gegeben, die den Zahlenraum bis ins Unendliche durchleuchten und die zusammengesetzten Zahlen streichen. Die Frage ist aufgetaucht, ob es da in der Ferne des Zahlenraumes überhaupt ungestrichene Zahlen, also Primzahlen gibt. Oder anders gefragt: Geht die Primzahlfolge immer weiter oder finden die Primzahlen irgendwo ein Ende?“

Jan kommt zu spät und übernimmt pflichtschuldig das Protokollieren des Dialogs. Wir nehmen den Faden wieder auf: "Was haben wir bisher über die Primzahlen herausgefunden; wo stehen wir jetzt?" Marina: "Die Menge der Primzahlen nimmt stetig ab, desto höher die Zahlen werden." – „Was heisst das?“ – Marina: „Die Anzahl der Primzahlen pro Blatt nimmt ab.“ Ich entgegne: „Wir haben Gegenbeispiele.“ Daniel: „Wenn man zwei Primzahlen multipliziert und 1 addiert, gibt es wieder eine Primzahl, habe ich einmal gehört.“ Da kommt also doch der richtige Ansatz, allerdings für mich von unerwarteter Seite. Daniel und Thomas haben bereits Beispiele gerechnet.

$$2{\cdot}3 + 1 = 7 \qquad 2{\cdot}3{\cdot}5 + 1 = 31$$

Der Unterbruch hat also Früchte getragen. Ähnliche Sprünge sind irgendwann reif und kommen bei allen bisherigen Inszenierungen, auch bei Wagenschein (S. 232) und Werner (S. 169f) vor. Die Furcht vor einem allzu „schnellen Weg“, wie Werner meint, erachte ich als unbegründet. Ich will dem Vorschlag freien Lauf lassen und bin neugierig auf den folgenden Prozess. Fragend schaue ich in die Runde. Werden diese Ausführungen verstanden? Ja, der Schritt lag im Bereich des Erreichbaren, sozusagen in der Luft.

Marina: „Die + 1 braucht es, um die Zahl nicht durch 2 , 3 , 5 teilbar zu machen. Es bleibt immer ein gewisser Rest.“ Auf meine Nachfrage ergänzt sie: „Es bleibt immer Rest 1.“
Raphael P. bringt bereits die nächste Zahl: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$
Michael schaut in der Formelsammlung, er hätte auch an der Tafel Bestätigung gefunden, dass dies eine Primzahl ist. Die Beispiele habe ich an der Tafel notiert und warte gespannt auf die Fortsetzung, die auch prompt folgt. Auch die 2311 stellt sich gemäss Tabelle als Primzahl heraus.

$2 \cdot 3 + 1$	=	7	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$	=	31	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$	=	211	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$	=	2311	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$	=	30031	???

Für die Zahl 30031 reicht die Tabelle nicht. Wie können wir überprüfen. Raphael sagt, wir müssten teilen durch die Primzahlen bis 173, gemäss unserer Wurzelregel. (Die Wurzel aus 30031 beträgt 173.29, also ist 173 die grösste Primzahl, deren Quadrat höchstens 30031 beträgt.)

Für die Überprüfung verteile ich der Reihe nach die verschiedenen Zehnerabschnitte an die Schülerinnen und Schüler. Mehrere Schüler kommen an die Tafel, um ihre Primzahlen zu finden. Ein Blick auf das am Anfang ausgefüllte Blatt hätte allerdings genügt! Bald melden sich die ersten, die Zahl sei nicht teilbar. Ausgerechnet Daniel, der diese Idee ins Spiel gebracht hat, ist durcheinander geraten. Er geht an die Tafel, spricht etwas von 59 und Primzahl, geht wieder an den Platz, tippt wieder ein, rechnet ... Eine Welt bricht ihm zusammen. Daniel verkündet aufgeregt: „Es ist keine Primzahl; 30031 ist durch 59 teilbar.“ In gespannter Erwartung ergänze ich das Ergebnis an der Tafel und frage: „Was bedeutet dies jetzt?“

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 \quad = \quad 30031 \quad = \underline{59 \cdot 509\ !}$$

Fritz: „Dies widerlegt die Behauptung von Michael, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.“ Zum Glück versucht David seine gehörte Idee, von der er so überzeugt war, zu retten: „Vielleicht gibt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1$ wieder eine Primzahl.“ Thomas: „Vielleicht geht es nur bei einer bestimmten Anzahl von Primzahlen zusammengerechnet.“ Joël vermutet, dass sich irgendetwas wiederholt hat. – Aber was?

Fritz bringt eine sehr logische Idee: Wir nehmen in unsere Reihe immer die neu erzeugte Primzahl und erhalten:

$2 \cdot 3 + 1$	=	7 PZ	
$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$	=	43 PZ	
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1$	=		usw.

Raphael P.: „Wir könnten es ja mit -1 probieren.“ Ich notiere beide Anfänge an die Tafel und bitte die Schüler fortzusetzen und zu probieren.

$2 \cdot 3 + 1$	=	7 PZ	$2 \cdot 3 - 1$	=	5 PZ		
$2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$	=	43 PZ	$2 \cdot 3 \cdot 5 - 1$	=	29 PZ		
$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1$	=	1807 PZ ??	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1$	=	209	=	$11 \cdot 19$!!!

Die Fülle der Vorschläge überrascht mich. Es ist auch für mich spannend, da ich nicht alle Ansätze durchgerechnet habe. Umso erleichterter bin ich, dass all diese Ansätze auf die gleiche Art früh scheitern. ($1807 = 13 \cdot 139$)

10 ZAHLENTAFELN

Primzahlen und Faktoren

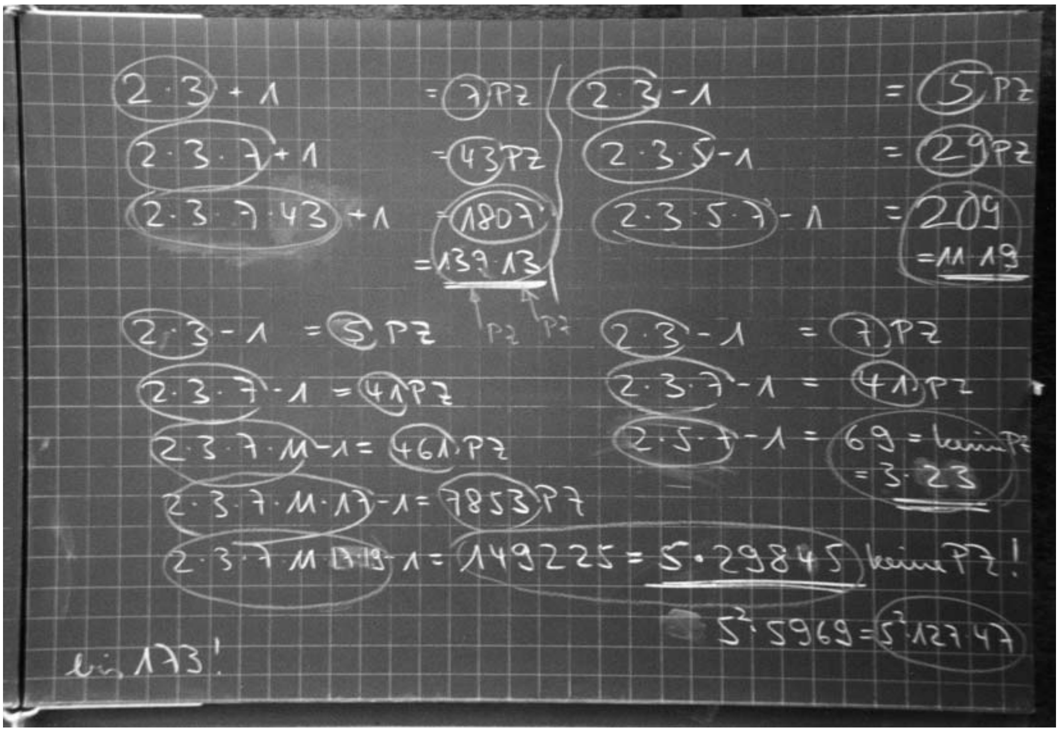
1 … 1529

n	n+1	n+7	n+11	n+13	n+17	n+19	n+23	n+29
0	1	7	11	13	17	19	23	29
30	31	37	41	43	47	7*7	53	59
60	61	67	71	73	11*7	79	83	89
90	13*7	97	101	103	107	109	113	17*7
120	11*11	127	131	19*7	137	139	13*11	149
150	151	157	23*7	163	167	13*13	173	179
180	181	17*11	191	193	197	199	29*7	19*11
210	211	31*7	17*13	223	227	229	233	239
240	241	19*13	251	23*11	257	37*7	263	269
270	271	277	281	283	41*7	17*17	293	23*13
300	43*7	307	311	313	317	29*11	19*17	47*7
330	331	337	31*11	49*7	347	349	353	359
360	19*19	367	53*7	373	29*13	379	383	389
390	23*17	397	401	31*13	37*11	409	59*7	419
420	421	61*7	431	433	23*19	439	443	449
450	41*11	457	461	463	467	67*7	43*11	479
480	37*13	487	491	29*17	71*7	499	503	509
510	73*7	47*11	521	523	31*17	23*23	41*13	77*7
540	541	547	29*19	79*7	557	43*13	563	569
570	571	577	83*7	53*11	587	31*19	593	599
600	601	607	47*13	613	617	619	89*7	37*17
630	631	91*7	641	643	647	59*11	653	659
660	661	29*23	61*11	673	677	97*7	683	53*13
690	691	41*17	701	37*19	101*7	709	31*23	719
720	103*7	727	43*17	733	67*11	739	743	107*7
750	751	757	761	109*7	59*13	769	773	41*19
780	71*11	787	113*7	61*13	797	47*17	73*11	809
810	811	43*19	821	823	827	829	119*7	839
840	29*29	121*7	37*23	853	857	859	863	79*11
870	67*13	877	881	883	887	127*7	47*19	31*29
900	53*17	907	911	83*11	131*7	919	71*13	929
930	133*7	937	941	41*23	947	73*13	953	137*7
960	31*31	967	971	139*7	977	89*11	983	43*23
990	991	997	143*7	59*17	53*19	1009	1013	1019
1020	1021	79*13	1031	1033	61*17	1039	149*7	1049
1050	1051	151*7	1061	1063	97*11	1069	37*29	83*13
1080	47*23	1087	1091	1093	1097	157*7	1103	1109
1110	101*11	1117	59*19	1123	161*7	1129	103*11	67*17
1140	163*7	37*31	1151	1153	89*13	61*19	1163	167*7
1170	1171	107*11	1181	169*7	1187	41*29	1193	109*11
1200	1201	71*17	173*7	1213	1217	53*23	1223	1229
1230	1231	1237	73*17	113*11	43*29	1249	179*7	1259
1260	97*13	181*7	41*31	67*19	1277	1279	1283	1289
1290	1291	1297	1301	1303	1307	187*7	101*13	1319
1320	1321	1327	121*11	43*31	191*7	103*13	79*17	71*19
1350	193*7	59*23	1361	47*29	1367	37*37	1373	197*7
1380	1381	73*19	107*13	199*7	127*11	1399	61*23	1409
1410	83*17	109*13	203*7	1423	1427	1429	1433	1439
1440	131*11	1447	1451	1453	47*31	1459	209*7	113*13
1470	1471	211*7	1481	1483	1487	1489	1493	1499
1500	79*19	137*11	1511	89*17	41*37	217*7	1523	139*11

$1463 = 1440 + 23 = 209 \cdot 7$

Der zweite Faktor ist jeweils der kleinste Primteiler.

Thomas: „Wir sollten nicht die gleiche Folge der Primzahlen nehmen, sondern ein bisschen vertauschen.“ Michael stellt eine neue Theorie auf: „Immer nach zwei Primzahlen eine auslassen.“ Auch hier wird die Serie notiert (im nächsten Bild unten links) und der Versuch scheitert! Längere Zeit sitzen wir vor dem Scherbenhaufen.



Da ich merke, dass einige Schülerinnen und Schüler ins Wanken kommen und aufgeben wollen, frage ich erneut: „Wer denkt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt?“ Etwa zwei Drittel der Klasse meldet sich. Fünf neigen zur Ansicht, dass es nur endlich viele PZ gibt. Vorgängig hätte ich wohl fragen sollen: „Wer denkt, dass wir überhaupt herausfinden können, ob es unendlich viele Primzahlen gibt oder nicht?“ Sicher waren einige überzeugt, dass wir es nie herausfinden würden. Umso wuchtiger könnte die Fortsetzung folgen. Der Gong bringt einen willkommenen Unterbruch in die festgefahrene Situation.

Nach der Pause erinnere ich an unser ursprüngliches Anliegen. „Wir wollten zeigen, dass es immer wieder Primzahlen gibt? Und was ist passiert? Wir sind immer wieder „gescheitert“; wir fanden immer wieder zusammengesetzte Zahlen! Und doch, wir sind der Lösung nah!“ Um das Erreichte optisch zu verdeutlichen, umrahme ich gelb die gebildeten Produkte und die neu gewonnen Primzahlen, grün die letzten Zeilen in denen wir "gescheitert" sind. Eine Weile herrscht nachdenkliche Stille. Alex: „Nachdem es einmal bei einer Zahlenfolge nicht geht, könnte es bei der nächsten Zahl wieder weitergehen. Die erhaltenen Zahlen sind aus zwei Primzahlen zusammengesetzt.“ Ich versuche etwas Uferhilfe zu geben: „Und was lässt sich über diese Primzahlen sagen?“ Nach und nach dämmert es, dass diese Teiler ja keine der bisherigen Primzahlen sind, also *neue* Primzahlen sein müssen. Tobias formuliert als erster: „Und jetzt haben wir ja wieder eine Primzahl, also gibt es unendlich viele Primzahlen.“ Die Erkenntnis ist da. Einige nicken. Aber ist das wirklich allen klar?

Ich erteile den folgenden Auftrag: „Jemand sagt, er hätte in einem Sack alle endlich vielen Primzahlen. Verfasst ihm in Dreier- bis Vierergruppen eine schriftliche Antwort. (Zeit: 10 Minuten) Eine Gruppe ist sehr rasch fertig, andere haben noch kaum realisiert, was sie tun sollten. Nach rund 10 Minuten werden die Resultate gesammelt und ich lese sie vor:

"Du bist ein grosser Lügner, denn es gibt unendlich viele Primzahlen und es lassen sich immer neue finden!!"

"Wenn man die zwei kleinsten Primzahlen miteinander multipliziert und dazu 1 addiert, erhält man eine neue Primzahl. Multipliziert man die mit der vorherigen Multiplikation und addiert die mit 1, erhält man eine neue Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl, die in neue Primzahlen zerlegt werden kann."

"Alle Primzahlen im Sack miteinander multiplizieren und mit 1 addieren, es gibt entweder eine neue Primzahl oder man kann es so zerlegen, dass es zwei neue Primzahl gibt."

Wir haben vielleicht eine Theorie

$2 \cdot 3 - 1$	=	5	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 - 1$	=	29	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$	=	211	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1$	=	2311	PZ
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 1$	=	30029	PZ ???

"Wir multiplizieren alle Primzahlen im Sack miteinander und addieren 1. Es entsteht entweder eine neue Primzahl oder zwei neue Teiler, die auch Primzahlen sind. Die neuen Primzahlen setzt man wieder in die Reihe der Multiplikation. Somit sind die Primzahlen unendlich."

"Es gibt unendlich viele Primzahlen. Man kann sie immer wieder in eine neue Primzahl zerlegen. $30031 = 59 \cdot 509$ beides Primzahlen "

Diese Antworten sind natürlich noch nicht ausgereift, aber die Grundideen sind vorhanden. Da für weitere Diskussion keine Zeit bleibt, verspreche ich, alle Briefe auf ein Blatt zu kopieren und erteile den folgenden
Auftrag auf den kommenden Montag: Paul behauptet: "Es gibt nur endlich viele Primzahlen." Schreibe Peter einen ausführlichen Brief, in dem du darlegst, warum seine Behauptung nicht zutrifft.

Als Grundlage erhalten die Schülerinnen und Schüler am Nachmittag das versprochene Blatt mit allen bisherigen Sätzen. Die verbleibenden zehn Minuten brauche ich, um die korrigierten Proben zurückzugeben und einige Schwierigkeiten daraus zu besprechen.

Die Rückmeldungen auf diese Doppelstunde fallen sehr unterschiedlich aus. Während einige das Suchen und Scheitern interessant finden, ist die Verunsicherung für andere zu viel, führt bei ihnen zu einem schwer auszuhaltenden Durcheinander, zu einem „Gestürm“. AAA (2): „Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.“ Michael (1) ungeduldig: „War zu lang, um konzentriert dabei zu sein. Nach Daniels Beitrag abbrechen und zeigen wie weiter.“ Marino (6): „Trotz den ‚Rückschlägen’ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.“ Manuel (14): „Und wieder waren die ersten Formulierungen der Knackpunkt der folgenden Lektionen. Die Lektionen wurden immer mehr zu einem „Gestürm“.

Finale: Der Brief als Höhepunkt und der Vergleich zum Beweis bei Euklid und Wagenschein. Ein Essay.

Nur wenige der Schülerinnen und Schüler haben ihre Aufgabe schriftlich vorliegen, einige erläutern mündlich den Inhalt des zu schreibenden Briefes. Aus den Mitteilungen entnehme ich aber, dass die Idee des Beweises vielen klar geworden ist und so wage ich es, eine gemeinsam optimierte Fassung anzugehen. Wir tragen Satz für Satz zusammen:

Lieber Paul
Deine Behauptung stimmt nicht. Es gibt unendlich viele Primzahlen. Wenn wir alle deine endlich vielen Primzahlen der Reihe nach multiplizieren und eins addieren, dann erhalten wir eine neue Primzahl oder eine Zahl, die in neue Primzahlen zerlegt werden kann. Jetzt hat sich deine endliche Menge um mindestens eine Primzahl vergrössert. Und nun kannst du diesen Vorgang beliebig oft wiederholen. Somit ist bewiesen, dass es nicht nur endlich viele Primzahlen gibt.
Mit freundlichen Grüssen
Klasse 4A

Mit dieser Version bin ich jetzt sehr zufrieden. Dank der gemeinsamen Formulierung ist wesentlich mehr Klarheit erreicht worden. Das Briefeschreiben hat bei einigen bewirkt, was Tamina explizite beschreibt: „Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm“ in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig ‚geordnet’.“

Jetzt ist der Moment, um auf die grundlegende Struktur dieses Beweises hinzuweisen: „Man will zeigen, dass die Folge der Primzahlen nicht abbricht. Um dies zu beweisen, nimmt man vorerst das Gegenteil an, die Folge der Primzahlen breche ab, d. h. es gebe eine endliche Menge von Primzahlen. Bildlich gefasst haben wir diese Annahme mit dem Sack, in dem alle endlich vielen Primzahlen zusammengefasst sind. Dann haben wir logisch gezeigt, dass es ausserhalb dieses Sackes mindestens noch eine weitere Primzahl gibt, dass also dieser Sack gar nicht alle Primzahlen enthält. Damit ist unsere gegenteilige Annahme, nämlich dass es nur eine endliche Menge von Primzahlen gibt, widerlegt. Da es aber nur entweder eine endliche Anzahl Primzahlen gibt oder eben nicht (eine dritte Möglichkeit kennen wir nicht), dürfen wir folgern, dass es eben mehr als diese endliche Anzahl von Primzahlen geben muss. – Diese Art von Beweis nennen wir einen *Beweis durch Widerspruch* oder einen *indirekten Beweis*. In der Mathematik ist es oft einfacher, einen Beweis indirekt als direkt zu führen. Wir werden später weitere Beweise dieser Art kennen lernen. Auch im Rechtswesen ist es üblich, indirekt zu schliessen, dass jemand unschuldig ist: Wenn U der Täter ist, dann muss er um 19.30h am Tatort gewesen sein. Da er zu diesem Zeitpunkt aber nachweislich noch im Büro sass, befand er sich zum fraglichen Zeitpunkt nicht am Tatort und kann somit nicht der Täter sein. Also ist U unschuldig.“ Gemeinsam tragen wir das Grundprinzip dieser Beweisart zusammen:

Zu beweisen ist Aussage A
Wir nehmen an, Aussage A sei falsch, also das Gegenteil von Aussage A sei wahr.
Wir zeigen, dass diese gegenteilige Annahme auf einen Widerspruch führt.
Da Aussage A nur entweder wahr oder falsch sein kann,
schliessen wir, dass Aussage A wahr sein muss.

Zum Vergleich und zur Vertiefung verteile ich ein Blatt mit dem Beweis aus Euklids „Elementen“ (Euklid 1997, S. 204f) in Euklidscher und in modernerer Fassung sowie dem Beweis aus Wagenscheins Unterrichtsdurchgang an der École d’Humanité (Wagenschein 1980, S. 234f). Die Schülerinnen und Schüler studieren diese Sätze, können sie auf Anhieb gut verstehen und sind stolz, dass sie den Beweis selbst herausgefunden haben.

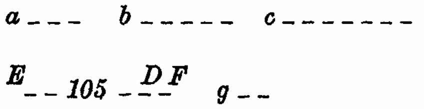
Euklid: Die Elemente.

Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Harri Deutsch Verlag.

§ 20 (L. 18).

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.

Die vorgelegten Primzahlen seien a, b, c. Ich behaupte, daß es mehr Primzahlen gibt als a, b, c.



Man bilde die kleinste von a, b, c gemessene Zahl (VII, 36); sie sei DE, und man füge zu DE die Einheit DF hinzu. Entweder ist EF dann eine Primzahl, oder nicht. Zunächst sei es eine Primzahl. Dann hat man mehr Primzahlen als a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, EF.

Zweitens sei EF keine Primzahl. Dann muß es von irgendeiner Primzahl gemessen werden (VII, 31); es werde von der Primzahl g gemessen. Ich behaupte, daß g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammenfällt. Wenn möglich tue es dies nämlich. a, b, c messen nun DE; auch g müßte dann DE messen. Es mißt aber auch EF. g müßte also auch den Rest, die Einheit DF messen, während es eine Zahl ist; dies wäre Unsinn. Also fällt g mit keiner der Zahlen a, b, c zusammen; und es ist Primzahl nach Voraussetzung. Man hat also mehr Primzahlen als die vorgelegte Anzahl a, b, c gefunden, nämlich a, b, c, g — q. e. d.

Euklid beweist: „*Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.*“
Bekanntlich ist eine Primzahl eine natürliche Zahl mit genau zwei Teilern. Jede zusammengesetzte natürliche Zahl lässt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen zerlegen. Den *Widerspruchsbeweis*, den Euklid (um 325 v. Chr.) führt, können wir übertragen und abgekürzt wie folgt darstellen:
Nehmen wir an, dass es nur endlich viele, sagen wir n Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibt, dann ist die Zahl $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ grösser als alle diese Primzahlen und wird von keiner dieser Primzahlen geteilt. Entweder ist diese Zahl selbst eine neue Primzahl oder sie ist zerlegbar in Primfaktoren, welche bisher noch nicht vorkamen. In beiden Fällen gibt es mehr als n Primzahlen. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, dass es nur n Primzahlen gibt. Nehmen wir die neue Primzahl in unsere Primzahlsammlung auf und fahren wir in derselben Weise fort, so sehen wir, dass die Folge der Primzahlen niemals abbricht.

Martin Wagenschein formuliert zusammen mit den Schülerinnen und Schülern folgendermassen (Wagenschein 1980, S. 234f):

Ein Satz über Primzahlen

1. *Frage*

Jede natürliche Zahl ist in Primfaktoren zerlegbar. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Solche Zahlen, die durch keine andere natürliche Zahl außer 1 und sich selbst teilbar sind, heißen *Primzahlen.*
Man weiß, daß die Primzahlen mit ansteigender Zahlengröße im großen und ganzen immer seltener werden.
Also entsteht die Frage: Gibt es eine letzte Primzahl?

2. *Vorbemerkungen*

a) Das Vielfache von irgendeiner Zahl, um eins vermehrt, ist nicht mehr durch diese Zahl teilbar. 4 mal 3 ist 12, also ist 13 nicht mehr durch 3 teilbar.
b) $a \cdot b \cdot c \cdot d$ ist teilbar sowohl durch a, wie durch b, wie durch c, wie durch d.
$a \cdot b \cdot c \cdot d + 1$ ist also durch keine dieser Zahlen teilbar (durch andere vielleicht).

3. *Der eigentliche Beweis*

p sei die letzte Primzahl, die wir kennen.
Wir multiplizieren alle Primzahlen bis p miteinander und addieren 1 dazu. Das Ergebnis

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots p + 1$$

ist dann unteilbar durch alle diese Primzahlen.
Es gibt nun *zwei Möglichkeiten:*
Entweder ist N selbst eine Primzahl, und zwar (natürlich immer) eine größere als p (z.B. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$).

Oder N ist eine *teilbare* Zahl. Dann muß sie Primfaktoren haben, die höher sind als p (z.B.: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$).

In jedem dieser beiden Fälle taucht eine neue Primzahl auf, die *größer* ist als p. Im ersten Fall N (211), im zweiten Fall mindestens zwei Primzahlen zwischen p und N (59 und 509, zwischen 13 und 30031). Da das Verfahren fortgesetzt werden kann, indem man die *neue* größte Primzahl 211 bzw. 509 statt p setzt:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots 211 + 1$$
$$\text{bzw. } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots 509 + 1$$

kann man immer größere Primzahlen bilden.

Zum Abschluss der Stunde lese ich meinen Primzahl-Essay vor:
„Ich sitze vor dem ausgefüllten farbigen Zahlentableau und betrachte die umringten Primzahlen, welche farbige Strahlen in die Weite des Zahlenraumes senden. Bei längerem Hinsehen verfalle ich mehr und mehr in einen Tagtraum - will sagen Nachttraum. Bei Dämmerung liege ich hoch auf einem Berg und schaue in den dunkler werdenden Abendhimmel. Einzelne Sterne beginnen aufzuleuchten, langsam werden es mehr und mehr und jeder leuchtet mit der ihm eigenen Kraft in die Tiefe des Universums. Es ist eine bunte Gemeinschaft, jeder mit seinen Besonderheiten. Einige sehe ich hell und klar, andere nur schwach und verschwommen, viele entziehen sich wohl ganz meinem blossen Auge. Immer mehr dieser Sterne leuchten auf, ich kann sie schon längst nicht mehr zählen.

> „Weißt du wie viel Sternlein stehen an dem blauen Himmelszelt?
> Weißt du, wie viel Wolken gehen weithin über alle Welt?
> Gott der Herr hat sie gezählet, dass ihm auch nicht eines fehlet,
> an der ganzen grossen Zahl, an der ganzen grossen Zahl.“

Wenn's mir nicht reichen sollte, oder wenn ich genauer hinsehen will, so liegen neben mir Feldstecher und Fernrohr. Es eröffnet sich eine neue, ungeahnte Vielfalt, fantastischer und geheimnisvoller als zuvor. Das noch tiefere Eindringen ins Unendliche des Alls (oder ist es nur endlich?) mit Satelliten und Sonden überlasse ich anderen.
Zurück aus dem Nachttraum funkeln die Primzahlen wie die Sterne, scheinbar willkürlich gestreut. Wenn ich weitere dieser Zahlen finden oder ihre Besonderheiten erforschen will, nehme ich den Taschenrechner oder den Computer. Und wie bei der Erkundung der Sterne,

sind auch hier weltweit Leute Tag und Nacht an der Arbeit. Ob einst der letzte Stern im All entdeckt werden kann? Aber eines ist uns gewiss: Die letzte Primzahl, die gibt es nicht.“

Wir lassen die Worte nachklingen und beenden die Lektion zwei Minuten früher als üblich.

Lektionen 10/11

Nachspiel: Geheimnisvolles und Besonderes rund um die Primzahlen.

Für die Fortsetzung verteile ich ein Blatt, auf dem sich einige Fragen und Knobelaufgaben über Primzahlen und natürliche Zahlen befinden. Es geht unter anderem um das Prüfen von Formeln zur Bestimmung von Primzahlen (z.B. $2^p + 1$ oder $n^2 + n + 41$) und um die Goldbachsche Vermutung (Jede gerade Zahl grösser 2 sei Summe von zwei Primzahlen). Wir fragen nach der Anzahl der Primzahlzwillinge und -drillinge; das eine so leicht zu beantworten, das andere bis heute unbekannt. Ergänzt werden diese Aufgaben durch einen Weltwocheartikel über Verschlüsselungsverfahren mit Primzahlen.

Den Rest der ersten und die ganze zweite Lektion lasse ich die Schülerinnen und Schüler an diesen Beispielen knobeln. Sie sind recht aktiv dabei und kommen da und dort mit interessanten Lösungsansätzen. Bei der Goldbachschen Vermutung sollen die Schülerinnen und Schüler 10 gerade Zahlen im Bereich von 4 bis 1000 notieren und jede als Summe von zwei Primzahlen schreiben. Dafür gehen viele nach vorn an die Tafel, wo unsere Tabelle mit den Farbstrahlen und den ausgesiebten Primzahlen aufgehängt ist. Auch jetzt ist sie noch sehr nützlich!

In der dritten Lektion von heute besprechen wir gemeinsam die verschiedenen Aufgaben, deren Ansätze und Lösungen, die Eulerschen Formeln, die ungelösten Probleme. Raffael P. ist von sich aus darauf gekommen, warum es ausser 3, 5, 7 keine weiteren Primzahldrillinge geben kann. Er erläutert uns, warum immer eine von drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen eine Dreierzahl sein muss!

Lektion 12

2.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

In der ersten Hälfte der Stunde besprechen wir ein paar ungelöste Aufgaben. Dann wende ich die Tafel: Die farbigen Primzahlblätter sowie alle andern wichtigen Blätter dieser Unterrichtseinheit sind aufgehängt, werden präsent. Sie bilden den Hintergrund für eine letzte Rekapitulation des ganzen Prozesses: Der Einstieg mit dem Zahlenstrahl, bekannte Aspekte der Primzahlen, die Suche nach Primzahlen mit der Zahlentabelle, die Frage „Gibt es unendlich viele Primzahlen?“, die Formelansätze, das Scheitern und der Durchbruch zur Erkenntnis, der Brief an Paul sowie am Schluss weitere Aspekte der Primzahlen mit lösbaren und ungelösten Fragen. So gewinnen wir den Überblick.

Ich erinnere an die Meinung: „Wir können gar nicht wissen, ob es unendlich viele Primzahlen gibt oder nicht.“ Dann begaben wir uns auf die Suche nach einer Formel für Primzahlen. Wir studierten verschiedene Ansätze, aber alle versagten. Gerade beim genaueren Betrachten der gescheiterten Versuche schafften wir den Durchbruch zur Erkenntnis, nämlich, dass wir immer wieder neue Primzahlen erzeugen können. Wir setzten uns mit der Behauptung von Paul auseinander, es gebe eine gewisse endliche Anzahl von Primzahlen. Unsere Überlegungen zeigten aber, dass dies nicht stimmen kann und somit das Gegenteil wahr ist. Euklid notierte diesen Beweis bereits vor 2300 Jahren in seinen „Elementen“, dem dauerhaftesten wissenschaftlichen Buch, dem wir ja schon im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras begegneten.

Somit haben wir den Überblick über die insgesamt 12 Lektionen gewonnen:

L 1-2 Primzahlen: Was wissen wir? Darstellung durch Rechtecksflächen.
Anwendungen und Teilbarkeitsregeln.
Ein erstes Primzahlblatt und Grundlagen für das Gemeinschaftswerk.

L 3-4 Durchlöcherte Papierstreifen als Sieb des Eratosthenes.
Beendigung der Blätter: Welche Zahlen sind noch abzustreichen?

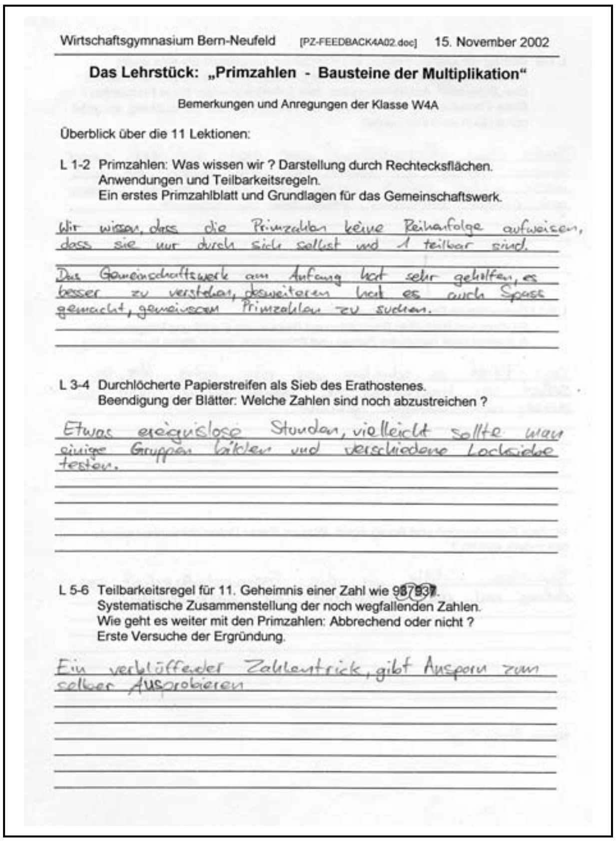
L 5-6 Teilbarkeitsregel für 11. Zusammenstellung der noch wegfallenden Zahlen.
Wie geht es weiter mit den Primzahlen: Abbrechend oder nicht?
Erste Versuche der Ergründung.

L 7-8 Beitrag von Daniel: Alle Primzahlen miteinander multipliziert und +1 ergibt neue Primzahl. Die Beispiele und die Enttäuschung. Variationen und wieder das „Scheitern“. Auferstehung aus dem Scherbenhaufen: Neue Primzahlen!
Erste Formulierung des Beweises als Antwort auf die Behauptung, es gebe nur endlich viele Primzahlen.

L 9 Finale mit der gemeinsamen Formulierung des Briefs an Paul.
Studium von Blatt über Primzahlen mit Beweis von Euklid und Wagenschein. Essay.

L 10-12 Nachgang mit Aufgaben über natürliche Zahlen und Primzahlen, samt Besprechung.

Dies dauert gute zehn Minuten und ist Einstimmung auf den Fragebogen, den ich jetzt ausfüllen lasse, um möglichst zu den einzelnen Unterrichtssequenzen vielfältige Rückmeldung zu erhalten. Er ist diesmal stärker nach Lektionen als nach Akten eingeteilt, genauso wie der Überblick oben.



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [PZ-FEEDBACK4A02.doc] 15. November 2002

Das Lehrstück: „Primzahlen - Bausteine der Multiplikation“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A

Überblick über die 11 Lektionen:

L 1-2 Primzahlen: Was wissen wir ? Darstellung durch Rechtecksflächen.
Anwendungen und Teilbarkeitsregeln.
Ein erstes Primzahlblatt und Grundlagen für das Gemeinschaftswerk.

Wir wissen, dass die Primzahlen keine Reihenfolge aufweisen, dass sie nur durch sich selbst und 1 teilbar sind.

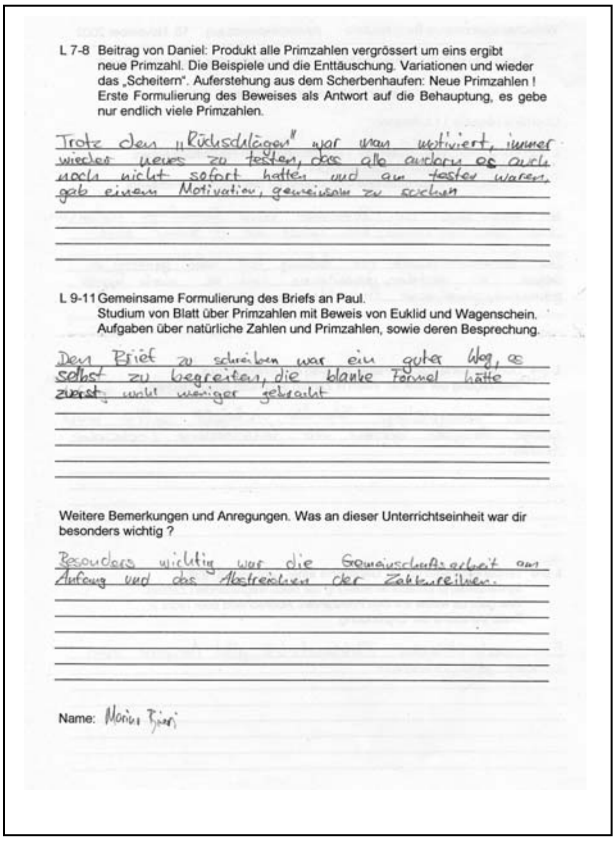
Das Gemeinschaftswerk am Anfang hat sehr geholfen, es besser zu verstehen, desweiteren hat es auch Spass gemacht, gemeinsam Primzahlen zu suchen.

L 3-4 Durchlöcherte Papierstreifen als Sieb des Erathostenes.
Beendigung der Blätter: Welche Zahlen sind noch abzustreichen ?

Etwas ereignislose Stunden, vielleicht sollte man einige Gruppen bilden und verschiedene Lochsiebe testen.

L 5-6 Teilbarkeitsregel für 11. Geheimnis einer Zahl wie 937937.
Systematische Zusammenstellung der noch wegfallenden Zahlen.
Wie geht es weiter mit den Primzahlen: Abbrechend oder nicht ?
Erste Versuche der Ergründung.

Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren



L 7-8 Beitrag von Daniel: Produkt alle Primzahlen vergrössert um eins ergibt neue Primzahl. Die Beispiele und die Enttäuschung. Variationen und wieder das „Scheitern“. Auferstehung aus dem Scherbenhaufen: Neue Primzahlen ! Erste Formulierung des Beweises als Antwort auf die Behauptung, es gebe nur endlich viele Primzahlen.

Trotz den „Rückschlägen“ war man motiviert, immer wieder neues zu testen, dass alle anderen es auch noch nicht sofort hatten und am testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen

L 9-11 Gemeinsame Formulierung des Briefs an Paul.
Studium von Blatt über Primzahlen mit Beweis von Euklid und Wagenschein.
Aufgaben über natürliche Zahlen und Primzahlen, sowie deren Besprechung.

Den Brief zu schreiben war ein guter Weg, es selbst zu begreifen, die blanke Formel hätte zuerst wohl weniger gebracht

Weitere Bemerkungen und Anregungen. Was an dieser Unterrichtseinheit war dir besonders wichtig ?

Besonders wichtig war die Gemeinschaftsarbeit am Anfang und das Abstreichen der Zahlenreihen.

Name: Marina Bieri

Das Lehrstück: „Primzahlen - Bausteine der Multiplikation“

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4A vom 15. November 2002

	Erste Begegnung mit Primzahlen, Teilbarkeits-regeln, Primzahlsuche (Lektionen 1/2)	**Papierstreifen und das Sieb des Eratosthenes im Gemeinschaftswerk (Lektionen 3/4)**	**Teilbarkeit durch 11. 937937 Wie geht es weiter mit den Primzahlen? (Lektionen 5/6)**	**Formelsuche Primzahlprodukt + 1 Scheitern und Durchbruch (Lektionen 7/8)**	**Brief an Paul. Aufgabenblatt über Primzahlen (Lektionen 9/11)**	**Rückblick Gesamtfeedback Lektion 12**
Micha-el (1)	Gute Einführung. Schafft einen gewissen Überblick. Nur bis Wurzel x war gut.	Nach L1-2 fast überflüssig. Haben Wurzel x ja schon besprochen. Die grosse Anzahl an Primzahlen war später nützlich.	War nötig. Besser anschauen schon bei L 1-2. Hätte es mehr Tipps von dir verlitten.	Hätte es nach L5-6 nicht mehr gebraucht. War zu lang, um konzentriert dabei zu sein. Nach Daniels Beitrag abbrechen und zeigen wie weiter.	Sehr gut! Aufgabenblatt ein bisschen zu schwer.	**L 9-11: Vertiefen !!!**
AAA (2)	Das Abstreichen war gut, vielleicht ein bisschen zu lange.		Die Teilbarkeitsregel für 11 kannte ich noch nicht. Es ist gut, haben wir sie angeschaut.	Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.	Gemeinsame Formulierung für mich unnötig. Deshalb war es ein bisschen langweilig.	
Toni (3)	Die ersten zwei Lektionen waren sehr spannend, da wir noch nicht wussten, ob sie endlich oder unendlich sind. Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinka-men und mit ganz einfachen Beispielen begannen.					**Ich fand diese 11 Lektionen sehr spannend, denn wir hatten die Möglichkeit selbständig neue Formeln herauszufinden. Nun bin ich froh zu wissen, dass es unendlich viele Primzahlen hat.**
Raffaël A (4)	Ich habe es gut gefunden, dass wir schritt-weise und langsam ins Thema eingestiegen sind. Wir hatten gut Zeit, die einfachen Grundlagen kennenzulernen und haben viele wichtige zusammenfassende Blätter erhalten.		Dies war ein Thema, das ich schon einmal behandelt habe. Doch es war sehr gut, eine solche Sache wieder repetieren zu können. Ich wäre froh, wenn solche wichtige Hilfsmittel öfter auch in anderen Bereichen angeschaut werden könnten.	Von da an hat sich ein grosser Teil der Klasse aufnahmefähiger gezeigt, da wir der „Lösung“ einen grossen Schritt näher gekommen sind. Die Formel der endgültigen Erkenntnis, es gäbe unendlich viele Primzahlen war auch für mich erleichternd, da es für mich ein wenig zu lange dauerte, bis wir die Lösung hatten.	Der Beweis ist nicht ganz bewiesen, weil man noch nicht alle Zahlen kontrolliert hat, ob sie eine Primzahl sind. Die Aufgaben waren recht einfach.	**Ich fand gut, dass wir zum Teil auch in Gruppen arbeiten konnten. Das gefiel mir. Auch dass uns ab und zu mit „wichtigen“ Tipps auf die Sprünge geholfen wurde, war sehr gut.**
Marina (5)	Dass die Primzahl zwei verschiedene Teiler hat. Ich habe die Aufgabe hoch interessant gefunden.	Ich habe es komisch gefunden, dass die Primzahlen keine richtige Reihenfolge haben.	Diese Regel hat uns erleichtert herauszufinden, ob eine Zahl durch 11 teilbar ist. - Wir haben angenommen, dass es weitergeht. Wir haben diskutiert darüber, wie es weitergehen könnte, aber etwas Brauchbares haben wir nicht herausgefunden.	Es wurde noch nicht festgestellt, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Nur ein Teil der Klasse hat angenommen, dass es endlich viele Primzahlen gibt. Seltsam war, dass jeder Beweis gescheitert ist.	Brief zu schreiben, war ein guter Weg, es selbst zu begreifen, die blanke Formel hätte zuerst wohl weniger gebracht.	
Marino (6)	Wir wissen, dass die Primzahlen keine Reihenfolge aufweisen, dass sie nur durch sich selbst und 1 teilbar sind. Das Gemein-schaftswerk am Anfang hat sehr geholfen, es besser zu verstehen, des weiteren hat es auch Spass gemacht, gemeinsam Primzahlen zu suchen.	Etwas ereignislose Stunden, vielleicht sollte man einige Gruppen bilden und verschiedene Lochsiebe testen.	Ein verblüffender Zahlentrick, gibt Ansporn zum selber Ausprobieren.	Trotz den „Rückschlägen“ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.		**Besonders wichtig war die Gemeinschaftsarbeit am Anfang und das Abstreichen der Zahlen-reihen.**
Raphael P (7)		Es war fast nicht lehrreich, weil wir wussten, welche Linien wir anstreichen müssen. Als dann Thomas und ich merkten, dass es weitere Zahlen gibt, lernten wir etwas.	Bei der Teilbarkeitsregel waren wir fasziniert. Aber als wir 3 Lektionen nur über „abbrechend oder nicht?“ diskutierten, war es schwierig, sich zu konzentrieren.		Fast eine Erleichterung, den Beweis präsentiert zu bekommen ! Es war spannend und lustig, Beweise aufzustellen. Aber gebracht hat es uns nicht viel. Nur welche Beweise wir nicht anwenden sollen.	**Das Thema Primzahlen ist spannend und faszinierend. Aber 3 Lektionen hintereinander nur ein Thema zu besprechen, ist für mich zu anspruchsvoll wegen der Konzentration. Nach 2 Lektionen passe ich weniger auf. Ich fände es besser 1-2 Lektionen zu besprechen, dann min. 1 Lektion Aufgaben zu diesem Thema zu machen. Aber schlussendlich haben wir viel gelernt.**

Rahel (8)	Mir hat es viel gebracht, dass wir das als Gemeinschaftswerk gemacht hatten. Da bekam man auch die Überlegungen der anderen mit.	Ich fand gut, dass Sie das am Projektor mit uns gemacht hatten. Doch wenn man so etwas selber machen muss, braucht das recht viel Zeit und man käme mit Abstreichen schneller auf dieselbe Lösung.	Diese Regel erleichtert einem das Teilen von Elferzahlen sehr stark. Das hat mir gefallen.	Ich dachte zuerst nicht, dass das funktioniert, vor allem, als wir so oft gescheitert sind. - Doch als man das Ganze dann doch beweisen konnte, begriff ich es gut. Wir haben aber irgendwie fast zu lange daran gearbeitet und sind sehr lange nicht weiter gekommen, dort ist es mir etwas verleidet.	Durch diesen Brief versteht man den Beweis noch besser, denn er ist verständlicher geschrieben als die Beweise aus dem Geometriebuch.	**Ich fand es gut, dass wir oft in Gruppen gearbeitet haben. Doch als wir bei dem Beitrag von Daniel so lange nicht weitergekommen sind, wurde es in der Klasse unruhiger und ich habe weniger zugehört.**
Tamina (9)	Ich fand es gut, dass wir das in Gruppen gemacht haben. So konnte man einander helfen.	Die durchlöcherten Papierstreifen fand ich gut, aber das mit dem Abstreichen fand ich mühsam, vielleicht lag das daran, dass ich so hohe Zahlen hatte (2100-2300).	Teilbarkeitsregel für 11: Ist ein guter Trick.	Fand ich am Anfang interessant, doch dann wurde es schwierig, so lange den gleichen oder ähnlichen Vermutungen zuzuhören. 2 oder 3 Lektionen nacheinander das zu machen, war echt nervtötend.	Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm" in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig „geordnet".	**Wie schon gesagt: Am Anfang war es echt interessant, doch mit der Zeit konnte ich's nicht mehr hören. „Ach hör mir auf mit Primzahlen."- Ich glaube nicht, dass die Anzahl Lektionen zuviel waren, sondern dass 3 Lektionen nacheinander immer am gleichen rumsondieren einfach zu viel ist. - Ausserdem war mir erst ganz am Schluss klar, dass es wirklich unendlich viele Primzahlen gibt. Ich habe es von Anfang an vermutet. Doch ganz sicher war ich mir nie, denn du hast immer (oder viel) dagegen argumentiert. Auch deswegen hatte ich mit der Zeit ein „Gestürm" im Kopf.**
Alissa (10)	Selbständiger Einstieg finde ich gut ! Da jeder seinen „Senf" dazu geben konnte, wurde der Unterricht spannend.	Habe ich spannend gefunden, weil man verschiedene Zahlenreihen mit einem oder mehreren Strichen abstreichen kann.	Es vereinfacht einem das Rechnen! Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!	Diese Idee von Daniel fand ich mutig, aber so richtig begriffen habe ich es nicht, weil es gar nie richtig erklärt worden war. Begriffen haben es wahrscheinlich nur diese Leute, denen es sofort logisch war.	Ich fand es gut, wie wir „spielerisch" auf eine Regel gekommen sind und auch dass jeder seine Meinung (ob unendlich oder endlich) vertreten konnte.	**Dass wir intensiv bei diesem Thema dabei waren und uns auch bildlich mit dem Thema befassten, kenne ich noch nicht so gut. (Wir haben immer nur Aufgaben gelöst.)**
Daniel (11)	Die Gruppenarbeit war gut. Es war gut, dass wir selber Primzahlen auf den Blättern suchen mussten.	Es gab etwas viel zu tun, weil es viele Zahlen hatte, die wir abstreichen mussten. Es war eine gute Übung.	Es hat schon sehr geholfen, weil man muss dann nicht mehr schriftlich rechnen. Es war gut zu hören, was die anderen zu den Primzahlen sagen.	Als der Beweis nicht gut ging, fand ich das schön schade, aber bis zum Schluss haben wir es ja noch herausgefunden.	Es war eine gute Repetition von dem, was wir vorige Stunde gemacht haben. Die Übungen waren gut. Bei der letzten Übung war es etwas schwierig, es zu lösen, weil es viel zu tun gab. Beim Besprechen fand ich wichtig, dass man bei der letzten Aufgabe nicht schriftlich rechnen muss.	
Lisa (12)	Guter Einstieg! Man konnte gerade am Anfang selbständig ausprobieren und seine Ideen testen.	Das Ergebnis der Blätter und das Aussieben von Zahlen, fand ich spannend.	Es fasziniert mich, dass diese Elferregel wirklich geht.	Es gab zu wenig Möglichkeit, etwas selbst zu machen und auszuprobieren. Zu lange nur reden war anstrengend und die Konzentration nahm recht schnell ab. Aber die Idee von Daniel fand ich eigentlich recht gut, nur das Besprechen ging „zu lange".	Das mit dem Brief fand ich eine recht witzige und gute Idee. Es war dann auch der richtige Zeitpunkt mal Aufgaben dazu zu lösen.	**Der abwechslungsreiche Unterricht gefällt mir sehr gut. Nicht nur Aufgaben zu lösen, ist für mich etwas Neues. Das „im Kreis ein Thema besprechen" finde ich eine gute Möglichkeit, etwas zu lernen, so behalte ich den Stoff auch auf Anhieb gut und der Einstieg kommt rasch.**
Tobias (13)	Das mit den Rechtecksflächen war einleuchtend.	Das war gut, aber irgendwie geht das bei den höheren Zahlen nicht mehr auf.	Ich fand das gut, und für mich war das sehr einleuchtend.	Ich fand das gut, dass wir zuerst immer wieder scheiterten, denn umso mehr war es dann eine „Erfahrung", als wir es dann endlich „schafften".	Dieser Beweis ist etwas kompliziert, aber wenn man sich damit auseinandersetzt …	**Ich fand es gut, dass wir manchmal etwas zusammen machten und manchmal auch etwas alleine!**
Manuel (14)	Von mir aus gesehen ein guter Einstieg in die Primzahlen. Weckte bei mir Interesse an den Primzahlen.	Weiterhin noch interessant und „informativ". Mit dem Sieb wurde das Verfahren verbildlicht (tolle Idee).	Das Taschenrechnerspiel war eine gute Abwechslung. Aber die ersten Versuche der Ergründung sind mehr und mehr in eine verwirrende Diskussion ausgeartet.	Und wieder waren die ersten Formulierungen der Knackpunkt der folgenden Lektionen. Die Lektionen wurden immer mehr zu einem „Gestürm".	Hat bei mir wieder etwas Licht in die Angelegenheit gebracht. Waren die Lektionen, die ich fast als die interessantesten empfunden habe.	**Man sollte schauen, dass so Erklärungsversuche nicht in einem „Gestürm" enden. Dies sorgt nur für Verwirrung. - Noch eine kleine Anmerkung: Ich hätte es lieber, wenn man zwischen den „Diskussionen" öfters mal ein Blatt lösen könnte. Es würde ein bisschen mehr Abwechslung in den Unterricht bringen.**
BBB (15)	Am Anfang wusste ich schon ein bisschen über Primzahlen, habe aber viel dazu gelernt.	Es ist zwar etwas Gutes, aber wenn man mit höheren Zahlen dies machen müsste, würde dies recht mühsam.	Diese Regel ist sehr gut, sie ist gut zu verstehen.	Dies war sehr interessant, zu behaupten, dass es unendlich Primzahlen gibt. Ich hätte nicht gedacht, dass es mit dieser Formel gehen würde.	War eine kleine Abwechslung.	**Ich fand es sehr gut mit der ganzen Klasse zu arbeiten und immer wieder neue Behauptungen und Formeln zu lernen. Ich finde der Unterricht ist so gut gestaltet.**

Matthias (16)	Die Einführung fand ich gut, da ich vor dieser Stunde noch nichts über Primzahlen wusste und nachher schon viel über sie gelernt hatte.	Mir ist nicht ganz klar geworden, welche Zahlen man sonst noch abstreichen muss.	Die Teilbarkeitsregel hast du gut erklärt. Ich wusste sehr schnell, wie man sie anwendet.	Die zweite Stunde war etwas langweilig. Man versuchte immer neue „Formeln“ zu suchen, um die Unendlichkeit der Primzahlen zu beweisen. Aber jeder Versuch scheiterte.		**Ich habe nicht gewusst, dass man nur bis zur Wurzel einer Zahl rechnen muss, um herauszufinden, ob es eine Primzahl ist.**
Joël (17)	Dass jeder ein anderes Blatt hatte, war gut, denn so musste jeder für sich selbst (mit Hilfe der anderen) arbeiten, und konnte nicht nur abschreiben.	Das Sieb ist genial. Es ist nur schade, dass nur zwei der Klasse nach weiteren Primzahlen suchten.	Dies regte zu guten Diskussionen und Theorien an.	Dieser Beitrag war sehr interessant, weil seine Theorie ja eigentlich nicht aufgeht und doch konnten wir Schlüsse daraus ziehen.	Der Beweis des Euklid ist ein bisschen zu kompliziert, aber die Wagenscheintheorie ist interessant.	**Das „freie“ Arbeiten und das Selberherausfinden der Formeln, denn so leuchtete es uns richtig ein. - Zwischendurch war aber dann ein Bisschen tote Hose und ein paar Mitschüler konzentrierten sich nicht mehr. Fazit: Das Lehrstück ist gut und interessant und ich würde gerne weiter so arbeiten!**
David (18)	Da wir nicht alle in der Klasse das gleiche Wissen über die Primzahlen hatten, war es sehr gut zu hören, was die anderen darüber wissen und können.	Das System mit den Blättern war sehr einleuchtend!	Dies mit der Teilbarkeitsregel von 11 war sehr faszinierend, genauso wie die Zahlen (z.B. 937937). Das war sehr interessant, zu sehen wie das geht.	Ja, diese Lektionen waren ein bisschen ein Durcheinander, da wir endlich glaubten, wir hätten einen Beweis oder eine Regel.	Dies mit dem Brief war eine sehr lustige Idee. Jedoch finde ich den Beweis von Euklid viel zu kompliziert, und nicht gerade einleuchtend, doch es ist interessant zu sehen, wie die Mathematiker dies früher bewiesen haben.	**Der Math-Unterricht von ihnen finde ich sehr gut gestaltet. Wir schauen nicht einfach irgend ein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir „versinken“ mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, <u>warum</u> das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!**
Thomas (19)	Interessanter, packender Einstieg.		Am Anfang war es eher kompliziert, doch mit der Zeit habe ich es begriffen.	In diesen zwei Lektionen ist die Motivation ein wenig verloren gegangen, weil wir lange nicht auf einen grünen Zweig kamen.	Sobald wir den Brief geschrieben haben, habe ich wirklich durchgesehen. Die Goldbachsche Vermutung hat mich fasziniert. Es war für mich faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte.	**Solche intensive Themen, die wir von Zeit zu Zeit entwickelten, machen mir Spass und sind interessant.**
Fritz (20)		Die Gruppenarbeit fand ich gut. Die Striche mit den Zahlen, die über mehrere Blätter gehen, fand ich faszinierend.	Es ist interessant, solche „Geheimnisse“ zu entschlüsseln.	Diesen Schritt fand ich gut, nur das eigene Formulieren fand ich überflüssig.	War eine gute Repetition. - Ich finde es faszinierend, dass Euklid den Beweis schon vor 2300 Jahren erbringen konnte.	**Dass wir selber auf die Lösung kommen mussten.**
Jan (21)		**Ich fand das mit den durchlöcherten Papierstreifen eine gute Idee. Vielleicht solltest du nächstes Mal auf dem Projektor zum Abstreichen Farben nehmen, die man besser sieht. (Gelb sah man eigentlich gar nicht.)**	**Von dieser Teilbarkeitsregel über 11 war ich noch so beeindruckt. Hier dachte ich noch, dass es endlich viele Primzahlen gibt.**	**Hier spürte ich, wie die Motivation „den Bach runter ging“. Der Grund war vielleicht, dass wir ein bisschen zu lange einfach nur diskutiert haben.**		**Heute fand ich noch sehr gut, dass du noch einmal gesagt hast, wie du dieses Lernstück gesehen hast.**

Der sanfte Einstieg in die Primzahlen wird begrüsst. So Raffaël A (4): „Ich habe es gut gefunden, dass wir schrittweise und langsam ins Thema eingestiegen sind.“ Oder Toni (3): „Es war gut, dass wir langsam ins Thema hineinkamen und mit ganz einfachen Beispielen begannen.“ Bei Manuel (14), Marina (5) und anderen hat der Anfang das Interesse geweckt. Das Abstreichen der Primzahlen wurde von Alissa (10) und Fritz (20) als spannend, von Daniel (11) und Tamina (9) eher als langweilig oder mühsam erlebt, insbesondere wenn ein Blatt mit höheren Zahlen zu verarbeiten war.

Die Regel für die Teilbarkeit durch 11 wie auch die kleine Zahlenspielerei haben verblüfft und fasziniert. David (18): „Dies mit der Teilbarkeitsregel von 11 war sehr faszinierend, genauso wie die Zahlen (z.B. 937937). Das war sehr interessant, zu sehen wie das geht.“ Alissa (10): „Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!“

Der lange Suchprozess hinterliess zwei Eindrücke: „Es war mühsam!“ und „Wir haben es geschafft!“ Die Schülerinnen und Schüler waren in sehr unterschiedlichem Tempo im Prozess. Entsprechend vielfältig sind die Rückmeldungen. Bei den einen überwiegt die Erinnerung an das Durcheinander und das mühsame Ringen, bei andern bleiben die spannenden Phasen und der Durchbruch im Vordergrund. AAA (2): „Ich fand es gut, dass wir so viele Beispiele an der Tafel gemacht haben. So kam jeder für sich langsam der Lösung näher.“ Tamina (9): „Am Anfang war es echt interessant, doch mit der Zeit konnte ich’s nicht mehr hören. ‚Ach hör mir auf mit Primzahlen.’“ Tobias (13) sieht einen Gewinn in der langen Durststrecke: „Ich fand das gut, dass wir zuerst immer wieder scheiterten, denn umso mehr war es dann eine ‚Erfahrung’, als wir es dann endlich ‚schafften’.“ Umso grösser war auch die Erleichterung bei Raffaël A (4) durch die „Formel der endgültigen Erkenntnis“.

Für mehrere Schülerinnen und Schüler war das gemeinsame Verfassen des Briefes klärend. Stellvertretend für Tamina (9), Marina (5) und andere zitiere ich Thomas (19): “Sobald wir den Brief geschrieben haben, habe ich wirklich durchgesehen.“ Für Rahel (8) war es wohl wichtig, dass der Brief aus unserem Prozess heraus entstanden war, wodurch für sie die Formulierung verständlich wurde: „Durch diesen Brief versteht man den Beweis noch besser, denn er ist verständlicher geschrieben als die Beweise aus dem Geometriebuch.“ Es gibt aber auch Schüler wie AAA (2), welche die gemeinsame Formulierung für sich unnötig finden.

Die kleinen Ergänzungen und Aufgaben im Zusammenhang mit den Primzahlen waren für mehrere Schüler willkommen. Wie die Zahlenspielerei dazwischen scheint das für einige Jugendliche geradezu das „Fleisch am Knochen“ zu sein, das Lebendige neben der Knochenarbeit rund um den Beweis. So wünscht sich Michael (1) in diesem Bereich eine Vertiefung. Die Beispiele öffnen gleichzeitig den Blick in die Tiefe und in die Weite. Thomas (19): „Die Goldbachsche Vermutung hat mich fasziniert. Es war für mich faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte.“

Die abschliessende Zusammenfassung mit dem Überblick wird kaum erwähnt. Einzig Jan (21) vermerkt, dass er den Überblick und die Randbemerkungen schätzte, welche wir in der letzten Stunde zusammentrugen.

Insgesamt scheint mir das Verhältnis zwischen „Knochenarbeit“ und „Fleischgenuss“ ausgewogen. Die Gesamtbeurteilungen fallen überwiegend positiv aus. Am meisten begeistert und differenziert formuliert David (18): „Der Math-Unterricht von ihnen finde ich sehr gut gestaltet. Wir schauen nicht einfach irgendein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir ‚versinken' mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, warum das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!" Andere Schüler wie Joël (17) und Thomas (19) formulieren konkret, dass sie gerne weiter so arbeiten würden.

Schauen wir uns noch zwei Schüler und eine Schülerin genauer an:
Für *Marino* (6) war das Gemeinschaftswerk Verständnis fördernd und es hat ihm Spass gemacht. Das Abstreichen bezeichnet er im Gesamtrückblick als „besonders wichtig", die damit verbrachte Zeit aber als „etwas ereignislose Stunden". Auf die Dauer hat ihn das Abstreichen offenbar gelangweilt, auch wenn er es vielleicht für den Fortgang als wichtig erachtet. Lieber hätte er mit den Lochsieben experimentiert. *Die Idee mit den Lochsieben lässt sich sicher zu einer Experimentier- und Testphase ausbauen, vielleicht könnte man sogar mit diesem Hilfsmittel die Primzahltabelle erzeugen, statt mit dem von einigen als langweilig empfundenen Abstreichen. Die anschaulichen Strahlen gingen dabei allerdings verloren.* Auch der verblüffende Zahlentrick regt Marino an zum Experimentieren, zum selber Ausprobieren. Anfangs war Marino ein klarer Vertreter der Ansicht, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Das Suchen nach einer Formel war wohl für Marino ein gewünschtes Experimentierfeld, so dass die Rückschläge der Motivation nichts anhaben konnten: „Trotz den ‚Rückschlägen' war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen." Über seinen intellektuellen Prozess bis hin zum Verwerfen seiner ursprünglichen Ansicht, erfahren wir nichts. Insgesamt erwähnt er immer wieder, dass er gerne mit anderen zusammen arbeitet.

Tobias (13) fand die Darstellung von Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen durch Rechtecksflächen einleuchtend. Bezüglich der Gemeinschaftsdarstellung ist ihm im Bereich der höheren Zahlen etwas unklar geblieben. Für Tobias war die Zahlenspielerei nicht nur einleuchtend, sondern sie wirkte auf ihn anregend, er dachte weiter, versuchte zu verallgemeinern. (S. 89) Das mehrmalige Scheitern taxiert er als besonders fruchtbar für den Lernprozess. Als ersten durchzuckte ihn der Blitz (S. 94): „Und jetzt haben wir ja wieder eine Primzahl, also gibt es unendlich viele Primzahlen." Der Beweis von Euklid ist zwar kompliziert, aber mit einigem Aufwand verstehbar. Insgesamt schätzte er die Abwechslung der Arbeitsformen.

Tamina (9) erwischte für das Abstreichen das Blatt mit den höchsten Zahlen und fand die Arbeit trotz Gruppenhilfe als mühsam. Sie hätte das Arbeiten mit Lochsieben vorgezogen. Die Teilbarkeitsregel für 11 und der Zahlentrick haben ihr gefallen. Das Ringen um die Kernfrage fand sie anfangs interessant, doch schliesslich war es „echt nervtötend". Dazu kam das „Gestürm" im Kopf: Was gilt jetzt und was nicht? Für sie waren „3 Lektionen nacheinander immer am gleichen rumsondieren einfach zu viel". Der zu verfassende Brief half dann allerdings, das Durcheinander etwas zu ordnen und zur Klarheit zu kommen. „Ausserdem war mir erst ganz am Schluss klar, dass es wirklich unendlich viele Primzahlen gibt. Ich habe es von Anfang an vermutet. Doch ganz sicher war ich mir nie, denn du hast immer (oder viel) dagegen argumentiert. Auch deswegen hatte ich mit der Zeit ein ‚Gestürm' im Kopf." Nun, es ist immer wieder eine Gratwanderung zwischen Verunsichern und Helfen. Wir hören ja auch Raphaël A (4): „Auch dass uns ab und zu mit ‚wichtigen' Tipps auf die Sprünge geholfen wurde, war sehr gut." Schliesslich hat sich der Sturm bei Tamina gelegt. Die Erkenntnis hat sich durchgesetzt. In der darauf folgenden Probe verfasste sie den Brief an Paul mit ausserordentlicher Klarheit:

Lieber Paul
Deine Behauptung stimmt leider nicht. Es wäre doch zu schön, wenn man die Primzahlen einfach auswendig lernen könnte … Wenn man alle deine (endlichen) Primzahlen mit einander multipliziert und +1 rechnet (z.B. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$), erhält man eine Zahl, die nicht durch diese gebrauchten Primzahlen teilbar ist. Also ist diese neue Zahl (in unserem Falle 211) entweder eine Primzahl oder sie lässt sich in Primzahlen zerlegen, die wir nicht gebraucht haben. Diesen Vorgang kann man beliebig wiederholen. Man entdeckt so immer neue Primzahlen. Deswegen musst du einsehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Viele liebe Grüsse *Tamina*

In der folgenden Woche erfolgt ein kurzes Nachgespräch: „Ich bedanke mich nochmals für eure ausführlichen, die wohlwollenden und die kritischen Rückmeldungen. Das Echo ist durchwegs gut bis sehr gut. Einige von euch schätzen es offenbar, bei einem Thema zu bleiben und mehr in die Tiefe zu gehen. Das Abstreichen haben einige gern gemacht, für andere, insbesondere diejenigen mit hohen Zahlen, war es zum Teil mühsam. Der Siebgedanke war einleuchtend und hat gefallen. Vielleicht werde ich in Zukunft den Siebgedanken zu Lasten des Abstreichens ausbauen. Die Elferregel und der Zahlentrick haben euch fasziniert und zum Teil zum Weiterexperimentieren animiert.“ Auf Nachfrage erfahre ich, dass ein paar wenige Schüler den Trick zuhause vorgeführt haben. Niemand hat ihn aber weiterentwickelt. „Die zeitweilige Ungewissheit, ja Verunsicherung auszuhalten, war für einige von euch schwierig, besonders am Morgen mit den drei Lektionen hintereinander. Umso eindrücklicher waren am Schluss der Durchbruch, das Aufatmen, die Erlösung, aber auch der Stolz, dass wir es selbst herausgefunden haben. Das Briefschreiben, einzeln und dann gemeinsam, hat offenbar bei vielen von euch noch wesentlich zur Klärung beigetragen. Der Beweis bei Euklid ist wirklich nicht ganz einfach zu verstehen, aber mit etwas Anstrengung geht es. Und staunen dürfen wir ja schon, dass die Griechen bereits vor 2300 Jahren diesen Beweis so knapp und präzis geführt haben. Das Blatt mit den verschiedenen Aufgaben war anspruchsvoll und bot zusätzliche Kenntnisse über die Primzahlen. Es regte viele an zum Experimentieren und Weiterdenken. Einige von euch würden gerne wieder so arbeiten. Ich kann euch jetzt schon ankündigen, dass wir nach dem Pythagoras und den Primzahlen gegen Ende dieses Schuljahres mit einem weiteren Lehrstück arbeiten werden.“ Von Schülerseite erfolgen weder Nachfragen noch Ergänzungen. Sowohl Raffaël A (4), der den Beweis noch nicht als vollständig erachtete, als auch Tobias (13), der mit dem Abstreichen bei höheren Zahlen Schwierigkeiten hatte, scheinen ihre Unklarheiten bereinigt oder das Interesse daran verloren zu haben. Dies war der letzte Schritt des mehrstufigen Abschlusses dieser Unterrichtseinheit über die Primzahlen.

2.6 Didaktische Interpretation

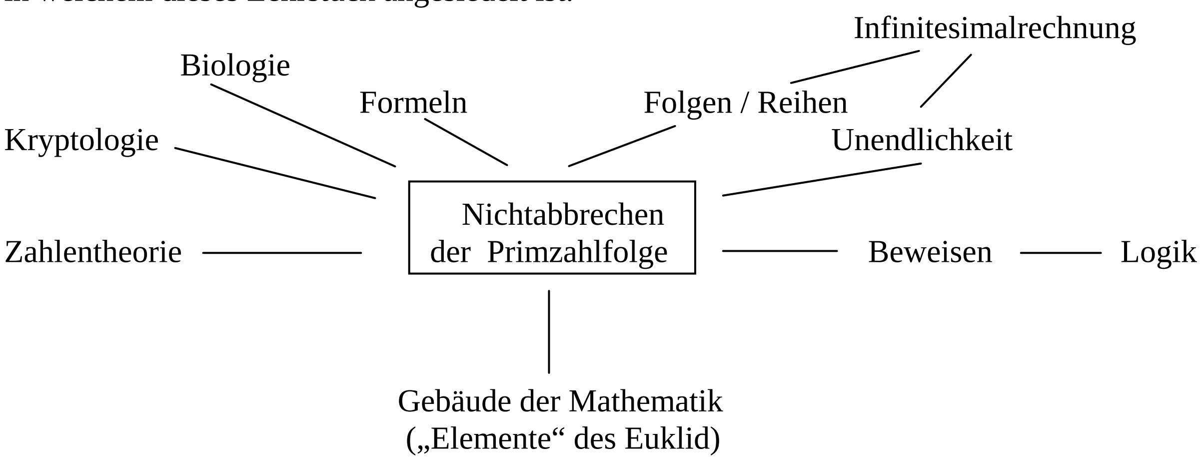
a) Methodentrias

Exemplarisch
Beim Betrachten des Zahlenstrahls mit den natürlichen Zahlen fallen zuerst die geraden Zahlen, die Dreier- und die Fünferzahlen, dann die Quadratzahlen auf. Ihre Gesetzmässigkeit ist bald einmal durchschaut, man sieht, wie es weitergeht. Aber die Primzahlen, das Herzstück der Zahlentheorie, fordern uns durch ihre scheinbare Unregelmässigkeit heraus. Zwar wird bald einmal klar, dass ihre Dichte abnimmt, aber ob sie irgendwo aufhören? Ob es überhaupt unendlich viele Primzahlen gibt, wie es unendlich viele Quadratzahlen gibt? „Wir können es nicht wissen“, ist eine immer wiederkehrende, nahe liegende Schülerantwort. Diese faszinierende Fragestellung, die schon vor mehr als 2300 Jahren die Denker beschäftigte und auf die sie eine schlüssige Antwort fanden, kann auch heute noch fesseln. Es liegt nahe, Vermutun-

gen aufzustellen, erste Erklärungen zu suchen, konkrete Formeln herzuleiten, zu prüfen, zu verwerfen, neue Wege zu gehen bis wir fast urplötzlich zur leuchtenden Erkenntnis vorstossen. Diese will schliesslich noch klar strukturiert und formuliert sein, bis dieses Musterbeispiel eines indirekten Beweises tief in uns verankert ist. Und so können wir, wenn wir uns genügend intensiv mit der Frage auseinandersetzen, an diesem speziellen Beispiel wie Wagenschein (1980, S. 228) formuliert: „erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken." David (18) drückt es im Feedback auf seine Art aus: „Wir schauen nicht einfach irgend ein Thema an, arbeiten es durch, beenden es (und vergessen es), sondern wir „versinken" mit ihnen tief in dem Thema und besprechen zusammen auch, warum das so ist, oder probieren das Gegenteil zu beweisen. Diese Art von Unterricht finde ich Spitze!"

Bei unserer Fragestellung kommen wir in Bereiche, wo unsere Wahrnehmung nur noch unscharf ist oder ganz aufhört? Wir extrapolieren mit dem Denken über unsere Sinne hinaus. An dieser uralten Fragestellung erleben wir, wie wir mit unserem Denken bis ins Unendliche hinaus Schlüssiges beweisen können. Je weiter wir in den Makrokosmos oder in den Mikrokosmos vorstossen wollen, desto mehr sind wir auf unser Denken angewiesen. Aber wir wissen jetzt, denn wir haben es erfahren, dass es möglich ist, selbst über diese unendlichen Weiten schlüssige Aussagen zu finden. Insofern ist es sicher auch eine „Sternstunde der Menschheit", was Euklid mit seinem Beweis bereits vor 2300 Jahren in seinen „Elementen" formulierte und was wir heute an der gleichen Fragestellung erleben können.

Gleichzeitig ist es aber auch gut zu erfahren, dass es Probleme gibt wie die Goldbachsche Vermutung oder die Primzahlzwillinge, bei denen es uns bis heute nicht gelungen ist, die letzte Wahrheit zu ergründen. Wird es uns je gelingen? Unser Denken ist nicht allmächtig, aber auch nicht ohnmächtig! Die thematische Landkarte soll das Verbindungsnetz aufzeigen, in welchem dieses Lehrstück angesiedelt ist.



Genetisch:
Die zentrale Fragestellung ist über 2300 Jahre alt. Obwohl wir über die Kulturgenese der Antwort nichts wissen, die Frage wurde bereits damals beantwortet und sie fasziniert auch heute noch. Wir durchleben und durchleiden den ganzen Werdegang von der einfachen, aber herausfordernden Fragestellung bis zur klaren Erkenntnis. Ohne grosse Vorkenntnisse und mit wenig Uferhilfe können die Klasse und darin jeder einzelne trotz Abgründen und Verzweiflung im Erfahrungs- und Erkenntnisprozess fortschreiten und den Weg zur Antwort auf die Frage finden. Dieses eigene Entdecken ist möglich ohne weit hergeholte Konzepte. Jeder kann sofort verstehen, wie es der andere meint und die Überprüfung oder Gegenargumente helfen weiter.

Mit den Händen schaffen wir unser farbiges Gemeinschaftswerk, mit den Augen betrachten wir die Quellen und ihre Strahlen, welche die natürlichen Zahlen bis ins Unendliche durchfluten. Die Frage, ob nicht in weiter Ferne alles durchleuchtet ist, hängt bildlich vor uns. Dieses Bild regt uns immer wieder zum Nachdenken an und begleitet uns durch den ganzen Prozess.

Euklids Argumentationsweise ist stärker geometrisch geprägt, die Unterschiede zu unserem Beweis sind aber nur gering. Die Schülerinnen und Schüler können seinen Beweis jetzt verstehen, auch wenn uns die Ausdrucks- und Darstellungsweise von damals ungewohnt ist.

Dramaturgisch

Beim Betrachten des Zahlenstrahls und im Vergleich mit anderen Zahlen ziehen die Primzahlen mit ihrer Unregelmässigkeit die Aufmerksamkeit auf sich. Beim Anwärmen und Vertrauen Finden in diese Primzahlen zeigt sich bald die Kernfrage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?“ Diese Frage erzeugt den Sog und bestimmt die ganze Unterrichtseinheit.

Der erste Akt ist stark durch das Handeln bestimmt. Die Suche nach Primzahlen benötigt Farben und Linien, ein ästhetisches Gemeinschaftswerk entsteht. Die gefundene Methode weist uns einen Weg, wie wir zu weiteren Primzahlen kommen können und sie liefert eine Primzahltabelle für den späteren Gebrauch. Zudem leuchtet die Kernfrage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge bildlich vor Augen. Wie werden wir sie entscheiden? „Wir können es nicht wissen!“, sagen Schüler. Ins Unendliche reichen unsere Sinne nicht! Stehen wir hier etwa vor einer Frage, deren Antwort wir nicht wissen, vielleicht nie wissen können?
Im zweiten Akt gilt es, mit unserem Denken weiterzukommen. Ein langer Suchprozess mit Formeln beginnt. Gerade in diesem zentralen Teil des Lehrstücks wird das Stück immer improvisationsoffen bleiben, denn der Lehrer weiss nie, was die Schüler schon wissen oder plötzlich von aussen in eine neue Stunde hineinbringen. Das gemeinsame Probieren, das Scheitern, das Verzweifeln und das Aushalten der Unsicherheit sind für einige der Schüler und Schülerinnen zeitweise schwierig. Andere halten durch wie Marino (6): „Trotz den ‚Rückschlägen’ war man motiviert, immer wieder Neues zu testen, dass alle andern es auch noch nicht sofort hatten und am Testen waren, gab einem Motivation, gemeinsam zu suchen.“
Der Wunsch, die Wahrheit endlich erklärt und präsentiert zu bekommen, wird aber mehrfach geäussert. Dank unserer Beharrlichkeit taucht dann plötzlich beim genaueren Betrachten des Scherbenhaufens, wie der Phönix aus der Asche, die leuchtende Erkenntnis auf, abermals ein Gemeinschaftswerk der ganzen Klasse. Erleichterung und Entspannung sind zu spüren. Raffaël A (4) beschreibt sie so: „Die Formel der endgültigen Erkenntnis, es gäbe unendlich viele Primzahlen, war auch für mich erleichternd, da es für mich ein wenig zu lange dauerte, bis wir die Lösung hatten.“
Im Finale wird mit dem Brief an Paul der Höhepunkt festgehalten, die Erkenntnis als indirekter Beweis formuliert. Er dient zur Vergewisserung und Bestätigung. Schülerin Tamina: „Den Brief fand ich gut. Denn endlich wurde das „Gestürm“ in meinem Kopf (von den letzten Lektionen) ein wenig ‚geordnet’.“ Mit dem Brief gewinnt die Arbeit eine ansprechende Form. Sie lässt sich einreihen und vergleichen mit den Darstellungen bei Euklid und bei Wagenschein. Im Nachgang wird vertieft, auf Anwendungen hingewiesen, Rückschau gehalten und Ausblick gegeben: Eine Abrundung, die Perspektiven aufzeigt.
Diese Unterrichtseinheit über die Primzahlen ist sehr eigenständig, bedarf keiner grossen Voraussetzungen und muss nicht in einem bestimmten Abschnitt oder Kapitel eines grösseren Zusammenhangs platziert sein. Sie ist aber beispielhaft für mathematisches Denken und für den Umgang mit dem Unendlichen, dem Kernanliegen der Mathematik.

b) Die acht Gestaltungsschritte

Lehrstücke entstehen in Lehrkunstwerkstätten. Auf dem Weg zum gereiften Lehrstück werden üblicherweise 8 Gestaltungsschritte durchlaufen. Dieser Vorgang verläuft mit unterschiedlicher Intensität und oft nicht linear, sondern mit Schleifen und Unterbrüchen. Am Beispiel meines Lehrstücks zu den Primzahlen will ich aufzeigen, wie dieses durch die verschiedenen Schritte Gestalt gewonnen hat.

1. Wegweiser zu exemplarischen „Sternstunden der Menschheit" aufspüren
Die Unregelmässigkeit der Primzahlen (die schliesslich doch wieder gewissen Regeln gehorchen) hat auch für mich als Lehrkraft viel Anziehendes und Geheimnisvolles. Hier gibt es Zwillinge, Drillinge und rasch formulierte und verstandene Vermutungen, die zum Teil bis heute nicht bewiesen sind. Und dann die sich aufdrängende zentrale Frage: „Gibt es unendlich viele Primzahlen?", auf die Schüler öfters antworten: „Das kann man nicht wissen." Und ob: Euklid hat die Antwort gewusst und bewiesen. Wagenscheins einziges ausführlich beschriebenes Lehrstück behandelt dieses Thema und von Wilhelm Werner liegt eine schriftlich dokumentierte Weiterführung vor. Diese Vorlagen forderten mich zu einer Neuinszenierung heraus, insbesondere da Wagenschein im Einstieg einiges offen lässt und seine Anregung, eine Primzahltabelle zu erstellen, von Werner nicht aufgenommen wurde. Zudem liebe ich das Nachdenken über das Unendliche. Es ist wohl der reizendste Gegenstand der Mathematik und ein zentrales Thema unseres Lebens überhaupt. Eindrücklich lässt sich am Beispiel der Primzahlen mit geringen Vorkenntnissen eine klare Aussage über die Unendlichkeit erringen. Mit einer Klasse den Weg bis zu dieser Erkenntnis zu gehen, lockt als ein spannendes und lohnendes Abenteuer.

2. Schulpädagogik: Bildung im Kulturhorizont und Schule zusammenstimmen
In der Schule tauchen die Primzahlen schon früh beim Addieren, Subtrahieren und Kürzen von Brüchen auf. Im Rahmen der Betrachtung von Zahlmengen und deren Teilmengen erscheinen diese Primzahlen wieder und bieten sich an als Gegenstand genauerer Betrachtung. Der sich hier aufdrängende klassische Beweis ist ein Musterbeispiel einer indirekten Beweisführung. Wir betreten einen anspruchsvollen Weg, der uns zurück zu fundamentalen Quellen der Mathematik, zu Euklid und Eratosthenes führt. Wir erfahren an diesem elementaren Beispiel, „was es heisst, mathematisch zu denken." Dies alles ist es wert, dass wir uns dafür im Unterricht die Zeit nehmen, auch wenn die Auseinandersetzung mit den Primzahlen nicht explizite im Lehrplan vorgesehen ist. Zu beachten ist, dass zwischen den Lektionen nicht allzu grosse Unterbrüche liegen, da sonst das Feuer jedes Mal wieder mühsam zum Brennen gebracht werden muss und deshalb kein lebendiger Dauerprozess in Gang kommen kann.

3. Didaktik: Stoff und Kind analysieren – Lehrstück dichten gemäss der lehrkunstdidaktischen Methodentrias „exemplarisch-genetisch-dramaturgisch"
Die Primzahlen mögen wohl in den Augen der Mathematiker Perlen sein, für die Jugendlichen müssen sie vorerst ins Blickfeld geholt werden. Über den ausgebreiteten Zahlenstrahl und das handlungsorientierte Wiederentdecken des Siebs von Eratosthenes sollte eine Annäherung, ja Anfreundung mit den Primzahlen möglich sein. So wird zudem eine Primzahltabelle generiert, wie sie Wagenschein (1980, S. 230, Fussnote) anmerkt. Erst jetzt hat die Kernfrage ihren Nährboden, aus dem sie sich erheben kann, ja natürlicherweise erheben muss. Von da an kann der Prozess seinen Lauf nehmen wie bei Wagenschein und Werner. Die Forderung nach einer Formel, mit der sich die Primzahlen packen lassen, wird wach. Es lohnt sich, gemeinsam zu suchen, zu diskutieren bis zum grossen Scheitern und zur Verzweiflung;

um dann beispielhaft zu erleben, wie gerade dieses scheinbare Scheitern eine ungeahnte Wende bringt, den Durchbruch und die einfache Erkenntnis. Der Weg dazu lässt sich jetzt gemeinsam glasklar formulieren. Dramatischer kann es fast nicht gehen. Und so werden gerade zwei Dinge wieder entdeckt: das anschauliche Sieb des Eratosthenes und der eindrückliche Beweis von Euklid für die Unendlichkeit der Primzahlen.

4. Methodik: Lehrstück unterrichtshandwerklich, unterrichtstechnisch ausgestalten

Meine Unterrichtsausgestaltung passierte zu einem schönen Teil in Marburg: in der stillen Kammer, in vielen Gesprächsstunden mit Prof. Berg und im Seminar angehender Mathematiklehrer. Der ursprünglich an die Wand geklebte Zahlenstrahl wurde zur ins Unendliche abrollbaren Zahlenrolle im Zentrum der Klasse. Der Zahlenstrahl bildet den Ausgangspunkt, die Primzahlen werden zum Gegenstand des Interesses. Die Primzahlsuche führt zum „Sieb des Eratosthenes“. Verschiedene Darstellungen weisen schliesslich auf die vorteilhafte Einteilung mit 30 Zahlen in jeder Kolonne. Erst später zeigte sich die Übereinstimmung mit einer bei uns verbreiteten Primzahltabelle. Das farbige Gemeinschaftswerk als erster Höhepunkt kann entstehen. Ein Siebmodell aus Papier mit Löchern, durch das die zusammengesetzten Zahlen „fallen“ können, entwickelte ich erst kürzlich. Wenn sie sich nicht schon vorher aufgedrängt hat, erwächst spätestens jetzt die zentrale Frage nach dem Abbrechen der Primzahlfolge. Eine „magische“ Formel soll die Lösung bringen, aber wie muss sie aussehen? Nach dem Scheitern der verschiedenen Ansätze führt uns ein unerwartetes „Aha“–Erlebnis zum Höhepunkt der Einsicht und zur klaren Formulierung eines überzeugenden Briefes an jemanden, der behauptet, es gebe nur endlich viele Primzahlen. Dies verdeutlicht die indirekte Führung des Beweises. Das Drama könnte hier mit Rückblick auf den Prozess aufhören. Das Lehrstück braucht aber zum Schluss etwas Verbreiterung und Vertiefung durch ausgewählte Aufgaben. Das Bedürfnis der Schülerinnen und Schüler, sich noch individuell mit verschiedenen Aspekten dieser inzwischen vertrauter gewordenen Primzahlen auseinanderzusetzen, bestätigt dies immer wieder. Das Gruppengeschehen wechselt zwischen Plenum und Kleingruppen, individuell geht der Prozess weiter zwischen den Stunden. Gegen Schluss formuliert jede Schülerin und jeder Schüler einzeln den Brief und bekundet damit, inwieweit die Argumentation verstanden ist. In den Inszenierungen von 2002 habe ich eine 12. Stunde als Schlussstunde für Überblick, Rückblick auf den Prozess, Feedback und weitere Hintergrundinformationen verwendet.

5. Unterricht als lebendiges Mitspielstück inszenieren

Das Lehrstück habe ich bereits viermal mit einer Quarta inszeniert, die benötigte Zeitdauer schwankte zwischen 8 und 12 Lektionen. Der Ablauf ist immer wieder sehr ähnlich. Im Anfang sind es der Zahlenstrahl, die Primzahlen als Bausteine der Multiplikation und dann die Suche nach diesen Primzahlen, welche das Geschehen bestimmen. Von da an läuft der Prozess offener. Wie bei kaum einem andern Lehrstück spielen die Phasen zwischen den Unterrichtslektionen eine Rolle: Es wird viel nachgedacht und argumentiert, mit den Eltern diskutiert, in Büchern oder im Internet recherchiert. Der Stundenanfang in der mittleren Phase ist jedes Mal ein spannendes Abenteuer: Wo stecken die einzelnen Schülerinnen und Schüler im Erkenntnisprozess? Kommt plötzlich eine neue Überzeugung, Erkenntnis ins Spiel? Die neuen Puzzleteile müssen immer wieder gesichtet, reflektiert und verarbeitet werden. So entsteht ein kontinuierlicher – aber für die Lehrkraft im Einzelnen wenig vorhersehbarer – Lernprozess. Das Neuformulieren des Erkenntnisstandes und die Auseinandersetzung mit neu eingebrachten Ideen – soweit vorhanden – bringt Schwung in die Klasse. Die Gefahr besteht allerdings, dass zwischendurch bei einzelnen Schülerinnen oder Schülern der Geduldsfaden reisst, die Resignation überhand nimmt und das Interesse erlahmt, bevor der Durchbruch gelingt und die Erkenntnis klar in Worte gefasst auf dem Papier steht. Es ist ein anspruchsvoller Weg, der uns bis zu den Wurzeln der Mathematik führt.

6. Unterricht realistisch erzählen und aufschreiben

Eine erste Fassung entstand im Herbst 2001, unmittelbar während und nach der ersten Durchführung. Sie diente mir als hilfreiche Grundlage für die folgenden Inszenierungen. Von meiner vierten und bisher letzten Durchführung im November 2002 ist die in diesem Kapitel eingefügte Beschreibung entstanden.

7. Unterricht interpretieren und evaluieren

Für die Evaluation habe ich Schülerrückmeldungen in Tabellenformat zusammengestellt. Der Einstieg wird sehr geschätzt, da viel Bekanntes wieder neu angeschaut werden kann und Neues über Primzahlen Erstaunen auslöst. Das Abstreichen der Zahlen im Gemeinschaftswerk wird von den einen als geniale Idee, von den andern als Zeitverschwendung wahrgenommen, insbesondere bei denjenigen, die sich mit den grösseren Zahlen befassten. In den ersten Inszenierungen hatte ich 20 Zahlblätter, also Zahlen bis $20 \cdot 210 = 4200$, heute beschränke ich mich auf etwa 10 bis 12 Blätter, um die mühsamen Blätter mit den grossen Zahlen auszuschalten. Die Grundideen und Grundprinzipien bleiben dieselben. Die lange Formelsuche faszinierte, löste aber Verzweiflung aus. Für einige Schüler war es schwierig, so lange an der Sache dran zu bleiben und die Unsicherheit auszuhalten. Deshalb tauchte zwischendurch öfters der Wunsch nach Aufgaben und Übungen auf, was allerdings den konzentrierten Prozess zur Erkenntnisfindung stören würde. Im Gesamtrückblick wird diese Unterrichtseinheit mit dem „Versinken“ in das Thema sehr positiv beurteilt. Am Schluss überwiegen die grosse Genugtuung und der Stolz, dass wir es trotz der zwischenzeitlich tiefen Verzweiflung doch geschafft haben. Trotzdem ist nicht zu übersehen, dass die einzelnen Teile *sehr* unterschiedlich wahrgenommen, erlebt und beurteilt werden. Für mich ist dies ein Hinweis, wie wichtig Methodenvielfalt im Kleinen wie im Grossen ist, und dass wir im Klassenverband noch öfters auf der Metaebene kommunizieren sollten.

8. Lehrstück didaktisch-methodisch-ästhetisch präsentieren

Präsentiert habe ich dieses Lehrstück drei interessierten Fachkollegen unserer Schule nach den ersten zwei Inszenierungen. Die Reaktionen waren wohlwollend, zu Änderungen des Lehrstücks gaben sie keinen Anlass. Für mich war es hilfreich, das Lehrstück für einmal als Ganzes aufzubauen und durchzugehen. Im März 2003 stellte ich dieses Lehrstück in der Berner Lehrkunstwerkstatt V vor. Dabei erhielt ich einige wichtige Hinweise zur Optimierung der schriftlichen Fassung. Erstmals präsentierte ich dort meinen Einstieg mit dem Zahlenstrahl und mein „Löchersieb“ aus Papier. Beide stiessen auf reges Interesse.

2.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Die bisher einzige Präsentation an der Schule fand am 15. November 2002. Grundtenor waren die Bedenken, ob wir uns das im 9. Schuljahr zeitlich leisten können, insbesondere da die Primzahlen nicht explizite im Lehrplan erwähnt sind. Einzig Daniel Wieland vom mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium zeigte sich verstärkt interessiert und studierte in der Zwischenzeit meinen Unterrichtsbericht. In den Unterricht hat er das Lehrstück allerdings noch nicht gebracht. Er erklärte mir kürzlich, dass er bis heute die Zeit nicht fand, um sich gründlich genug mit dem Lehrstück auseinanderzusetzen.

2.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Am stärksten vertreten sind in diesem Lehrstück die Grundideen [1], [4] und [9]. Es geht hier nicht um klar definierte Grundlagen, sondern um das, was Wagenschein (1980, S. 228) meint mit „erfahren, was es heisst, mathematisch zu denken." Es geht darum, „das aktive Begreifen dieses souveränen Verfahrens" (ebd.) eindrücklich und nachhaltig zu erleben. Auch wenn wir von den sehr grossen Primzahlen nur noch einzelne kennen, gibt uns unser beschränktes Denken die Gewissheit, dass es keine letzte Primzahl gibt. Und wieder einmal landen wir beim typisch mathematischen „End-Ergebnis: ‚lächerlich klar'. – Warum lächerlich?: Aus dem Gegensatz: Das anfangs undurchdringlich dunkel Erscheinende ist am Ende völlig durchsichtig, ‚klar' geworden." (ebd. S. 217). Der intensive Denkprozess dazwischen, das zähe Ringen, Verzweifeln und Neubeginnen bis zum erlösenden Durchbruch und zur klar strukturierten Erkenntnis, das ist das Wesentliche. Zum Denkgebäude der Mathematik gehört auch das Kennen von Fragestellungen, die noch nicht beantwortet sind, mit denen sich noch heute Wissenschafter auseinandersetzen. Das Problem der Primzahlzwillinge und die Goldbachsche Vermutung sind leicht verständliche Beispiele. Für Thomas (19) war es „faszinierend, dass es noch solche Sachen in der Mathe gibt, die man noch nicht beweisen konnte."

Wir tauchen intensiv in die Welt der Zahlen [4] mit ihren multiplikativen Bausteinen, den Primzahlen, und den daraus zusammengesetzten Zahlen. Verschiedene Strukturen, Regeln und Gesetzmässigkeiten fallen auf. Alissa (10) äussert sich begeistert: „Es vereinfacht einem das Rechnen! Ist auch spannend, was man alles mit Zahlen anstellen kann. Auch, dass diese Regel wirklich funktioniert. Faszinierend!" Den Primzahlen begegnen wir im Alltag ausser beim Bruchrechnen höchstens am Rande, z.B. bei der Verschlüsselung von Nachrichten oder bei Lebenszyklen von Zikaden. Die Primzahlen sind widerspenstig und deshalb herausfordernd, sie scheinen sich jeder Gesetzmässigkeit zu entziehen. Nur durch mühsames Ringen kann man ihnen das eine oder andere Geheimnis entlocken. Ganz konkret stossen wir mit unserem Lehrstück gegen das „Unendliche" im Grossen vor [9]. „Das kann man doch nicht wissen." ist eine erste Reaktion auf die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen gebe. Sie weicht schliesslich der überraschenden Gewissheit, dass wir wissen, ja sogar beweisen können, dass es mehr als eine endliche Anzahl, ja dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Ja noch erstaunlicher, dass den Griechen vor mehr als 2300 Jahren diese Erkenntnis und der Beweis dazu bekannt waren, obwohl damals im Alltag kaum Zahlen über 10'000 (eine Myriade) verwendet wurden.

Auf der Suche nach einer nützlichen Formel wie 2n+1 oder 6n+1 befassen wir uns mit der Grundidee [7]. Wir entwickeln und testen die verschiedensten Formeln, erleben aber deren Scheitern. Diese Erfahrungen lassen uns schliesslich mit $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ eher bei einem algorithmischen Ansatz [8] Zuflucht nehmen, der den Durchbruch bringt. Dieser Ansatz ist zwar nicht praktikabel, aber er garantiert uns theoretisch immer weitere Primzahlen und liefert damit den Beweis für das Nichtabbrechen der Primzahlfolge.

Im Überblick mag wiederum eine Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	● ● ●	●		● ● ●			● ● ●	● ●	● ● ●	