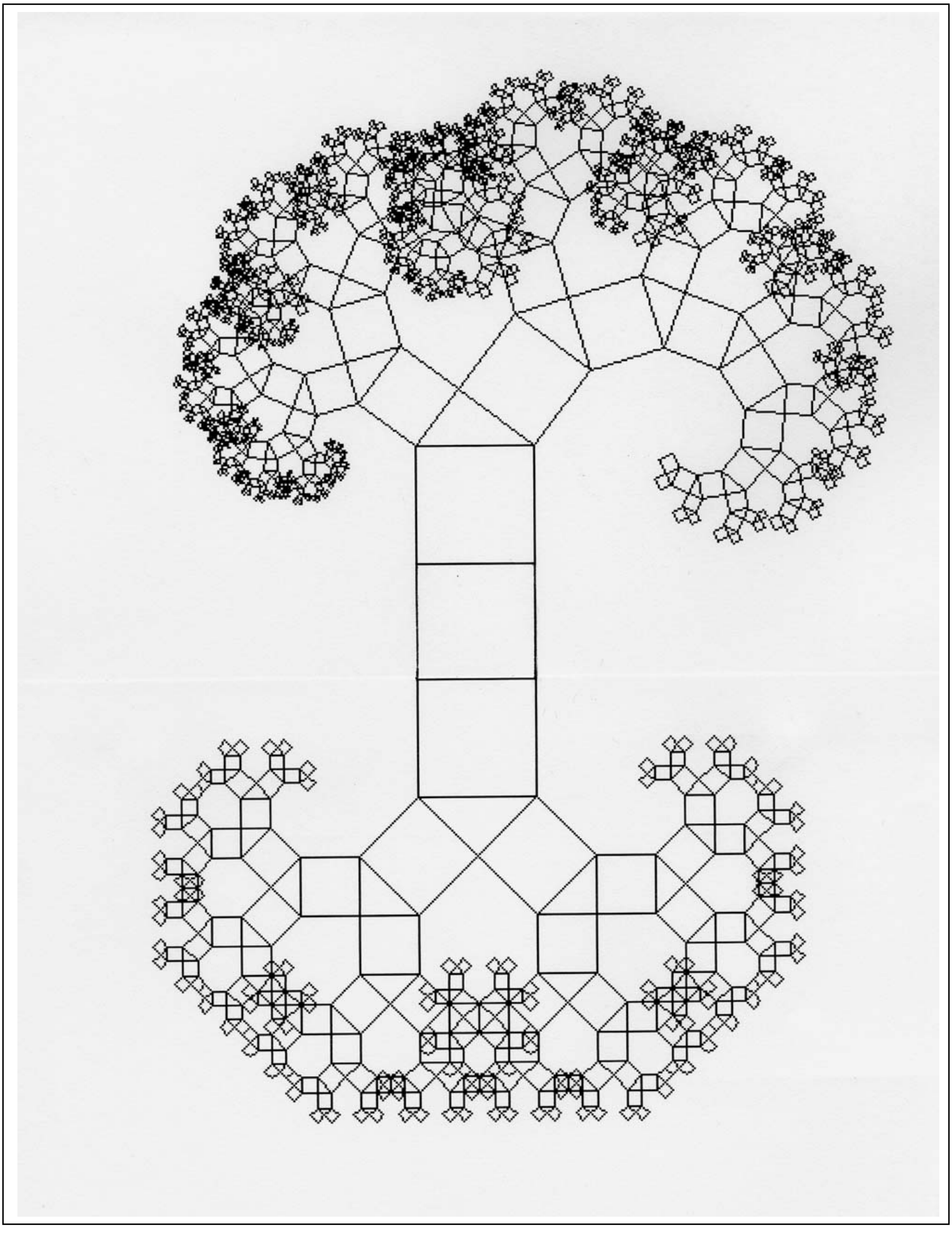
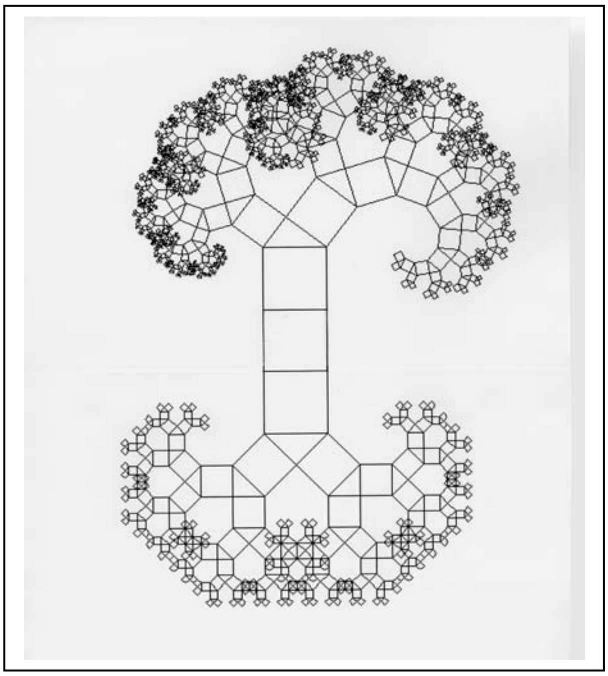


1. QUADRATE VEREINEN - QUADRATE ENTZWEIEN
Ein Lehrstück zum Satz des Pythagoras für die 9. Klasse des Gymnasiums



1.1 Einleitung

Wer hat nicht schon als Kind Papierquadrate zerschnitten und wieder zusammengesetzt, Tangramfiguren gelegt, sich an Zusammensetzspielen geübt oder einen zerbrochenen Topf in die ursprüngliche Form gebracht. Quadrate vereinen, Quadrate entzweien, Figuren verwandeln bis zur Quadratur des Kreises: Themen, die sich durch die ganze Mathematikgeschichte hindurch ziehen. Aus derartigen Fragen könnte der Satz des Pythagoras, einer der ältesten mathematischen Sätze und wohl der berühmteste, ans Licht gekommen sein. Sicher ist, dass er über Jahrtausende zum Nachdenken angeregt hat. Zwar ist er ein elementarer Satz, aber dennoch nicht unmittelbar einsichtig; er ruft nach einer klaren Begründung, nach einem *Beweis*. Wir erfahren die verschiedensten Beweisverfahren: sowohl algebraische als auch geometrische durch Zerlegung, Verwandlung, Ergänzung. Klares Argumentieren und das Beweisen als solches werden wesentlich. Noch heute fühlen sich Mathematiker wie Laien herausgefordert, zu den rund 400 bestehenden Beweisen einen neuen hinzuzufügen. Mit dem vor 2300 Jahren verfassten Beweis in Euklids Werk „Die Elemente“, lernen wir das dauerhafteste wissenschaftliche Buch kennen, worin diese Beweiskultur und damit verbunden der strenge strukturelle Aufbau einer Wissenschaft erstmals in überzeugender Art präsentiert wird. Definitionen, Axiome und Postulate bilden das Fundament, aus dem sich mit logischen Argumenten die ganze Euklidische Geometrie entwickelt hat. Dieser Aufbau diente immer wieder als Modell für andere Gebiete der Mathematik, aber auch für andere Wissenszweige. Da der rechte Winkel etwas Besonderes ist, findet dieser zentrale Satz des Pythagoras Anwendung in den verschiedensten Gebieten innerhalb und ausserhalb der Mathematik.

1.2 Vorlagen von Martin Wagenschein und Beate E. Nölle

Zum Satz von Pythagoras gibt es Vorlagen bei Martin Wagenschein und bei Beate E. Nölle.

Bei Wagenschein (1980, S. 251-267) wird der Satz des Pythagoras als Paradebeispiel für exemplarisches Lehren dargestellt. Er präsentiert zwei Wege des Einstiegs:
a) Das Seilspannerprinzip, das über die Zahlen, auch über die Pythagoräischen Zahlentripel, auf die Gesetzmässigkeit am rechtwinkligen Dreieck führt und durch Veranschaulichung zur Pythagorasfigur fortschreitet.
b) Die Art eines Legespiels, bei dem ein grosses Quadrat in geeignete Stücke zerschnitten werden soll, um anschliessend zwei kleine Quadrate herzustellen. Die Zerlegung ist allerdings schwierig, lässt sich nur schwer erringen, da der Sprung zur Lösung zu gross ist. Hier könnte der Weg über den einfachen Spezialfall – die Diagonalschnitte führen zu zwei gleich grossen kleinen Quadraten – bei der Bewältigung des allgemeinen Falls hilfreich sein.

Bei beiden Einstiegen muss der Lehrer „verhältnismässig stark führen“ (ebd. S. 255). Bei der Vorbereitung meines Lehrstücks bin ich zur Überzeugung gelangt, dass es einfacher und organischer ist, zwei Quadrate zu vereinen, als zu entzweien. Die langwierige Schnippelei ist geblieben, „sie muss wirklich getan werden“. Allerdings nicht nur „ihrer Vergeblichkeit willen“, es gibt bei meinem Ansatz durchaus Fortschritte, Erfolge. Das Problem ist lösbar!
Ein bewegliches Holzmodell konnte ich zusammenbauen, die elegante Version mit einem einzigen Seilzug habe ich allerdings noch nicht geschafft. Ob es sie je gegeben hat?
Für den Nachdenklichen bei Wagenschein (ebd. S. 256f) kommt jetzt die Frage: „Ist es denn auch *wahr*?“ – „Man sah, dass es ‚so kommt’, so zu kommen scheint. Man sah noch *nicht*, das es auch so kommen *musste*.“ – „Mit dem Nachdenken erst über solche Fragen *beginnt* ‚Mathematik’ und beginnt der ‚*Beweis*’.“ Um diese Einsicht zu vermitteln, zeigt Wagenschein, wie sich der Beweis auf die Winkelsumme im Dreieck und diese auf der Existenz von Parallelen abstützen lässt. Damit wird am Beispiel deutlich, und nur am Beispiel kann es klar werden, was er später (ebd. S. 262) als ein ‚Funktionsziel’ der Mathematik bezeichnet, nämlich: „Diese Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“. Zudem nähern wir uns auch seinem zweiten Funktionsziel (ebd. S. 263): „Zu erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein.“ Damit endet bei Wagenschein die Unterrichtsskizze.

Frau Nölle hat in einer 8. Klasse ein Lehrstück zum Satz des Pythagoras durchgeführt und beschreibt diese Inszenierung im Buch Lehrkunstwerkstatt I (Berg/Schulze 1997, S. 37 – 80) unter dem Titel „Dreiecksquadrate“. Im I. Akt beginnt sie zweigleisig mit den ägyptischen Seilspannern und mit dem Zauberer, der zwei Quadrate an der Tischecke zu einem einzigen vereint, wodurch auch gerade die typische Pythagorasfigur mit dem rechtwinkligen Dreieck im Zentrum aktuell wird. Die zwei Richtungen der Äquivalenzaussage sind für die Schülerinnen und Schüler kaum ein Thema. Erfreulich klar drängt sich dafür die durch Nikola formulierte Frage nach der Allgemeingültigkeit auf. Zudem findet hier Pythagoras mit seiner Lehre einen würdigen Platz. Im II. Akt macht Nölle mit ihrer Beweisvielfalt und mit den eindrücklichen Verwandlungsstudien der Dreiecksquadrate nach Wyss den „Beziehungsreichtum des Satzes … erfahrbar.“ (ebd. S. 45) Anstelle des Symmetriebeweises würde ich allerdings den sinnfälligeren und unmittelbarer mit der Pythagorasfigur verbundenen Ergänzungsbeweis vorziehen. Den Ähnlichkeitsbeweis nach Willmann zu bringen ohne vorgängige Behandlung des Kapitels Ähnlichkeit in der Geometrie, ist heikel. Dass ein Lieblingsbeweis gewählt wird und diese Wahl in einem Brief an den Zauberer Pythagoras begründet wird, gefällt mir sehr gut, denn es findet dabei individuell nochmals eine Vertiefung des Verständnisses und eine Auseinandersetzung mit dem eigenen Lernprozess statt. Die Auswertungssitzung rundet bildlich und im Metagespräch das ganze Lehrstück vor den Ferien ideal ab, auch wenn später noch die nötigen Anwendungen des Satzes folgen.

1.3 Struktur des Lehrstücks

Für ein Lehrstück mit meinen Schülerinnen und Schülern, die erst seit kurzem aus den verschiedensten Sekundarschulen zu mir in die 9. Klasse, die Quarta des Gymnasiums, kommen und mehr oder weniger vom Satz des Pythagoras gehört haben, hat sich die folgende Lehrstückstruktur herauskristallisiert.

I. Akt: Quadrate vereinen und entzweien

Im gemeinsamen Prozess stellen wir uns dem Problem, etwa 20 Quadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Dabei wird ein Beweis des Satzes von Pythagoras entdeckt. Wir studieren das Vereinen und Entzweien von Quadraten.

II. Akt: Pythagoras und „sein“ Satz

Exemplarisch ergründen wir den von uns entdeckten Beweis und wenden den Satz erstmals an. Ein Anhänger der pythagoräischen Lehre tritt auf und berichtet über Pythagoras und seine Lehre.

III. Akt: Beweisvielfalt

Verschiedene Beweise werden individuell studiert, in Kleingruppen vertieft und dann der Klasse präsentiert. Der Kathetensatz taucht auf. Wir finden Gemeinsamkeiten und Unterschiede der verschiedenen Beweise. Jeder Schüler wählt sich seinen Lieblingsbeweis.

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid

Der Beweis von Euklid wird analysiert. Was ist ein Beweis? Das Euklidsche Beweisverfahren: Voraussetzung – Behauptung – Beweis. Die „Elemente“ von Euklid bestimmen Grundlagen und Aufbau der „euklidschen“ Geometrie. Hinweis auf andere Geometrien! Querblicke in die Naturwissenschaften, in die Philosophie, ins Rechtswesen, . . .

V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Der Höhensatz vervollständigt die Satzgruppe des Pythagoras.
Es folgen Übungsaufgaben: Konstruktionen, Wurzelgesetze, Berechnungen.

VI. Akt: Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras

a) Klassische Verwandlungsaufgaben: Quadrate, Rechteck, Dreieck und beliebiges Vieleck verwandeln wir in ein Quadrat. Die Quadratur des Zirkels als unlösbares Problem und die Möndchen des Hippokrates.
b) Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke nach Wyss.
c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke schliessen den Kreis.

Abschluss:

Das Schlussbild gibt Anlass für einen Rückblick auf das Lehrstück und Reflexion auf der Metaebene. Das Lehrstück bietet Erfahrung der Entwicklung und Aneignung von Mathematik, ein Probemenu der Mathematik. Angestrebt ist eine ausgewogene Mischung von Phantasie und Denken, von Experimentieren und exaktem Handwerk, von freiem Suchen und strengem Üben. Es besteht differenzierte Möglichkeit beidseitiger Rückmeldungen.

Im I. Akt wähle ich den Zugang zum Satz des Pythagoras über das Vereinen der Quadrate. Allerdings möchte ich die Mathematik nicht als Zauberei darstellen, was sie für verschiedene

Schüler ohnehin schon ist, sondern über ein herausforderndes Problem einsteigen, das mit Nachdenken, Ausprobieren und strategischem Vorgehen gemeinsam lösbar wird. Das Vereinen der Quadrate ist einfacher als das Entzweien bei Wagenschein und diejenigen Schülerinnen und Schüler, die dem Satz des Pythagoras bereits in der Sekundarschule begegnet sind, geniessen absolut keinen Vorteil. Ich habe sogar mit Lehramtsstudenten in Marburg, mit ausgebildeten Mathematik- und anderen Lehrkräften in Bern, Luzern und Trogen diesen Einstieg erprobt und alle zum intensiven Nachdenken und Ausprobieren angeregt. Das eigene Schnippeln und Probieren erachte ich mit Wagenschein (1980, S. 255) und mit Nicole bei Nölle (Berg/Schulze 1997, S. 74): „…gerade durch das Schneiden, Legen und eigene Probieren beim ersten Beweis habe sich der Weg bei ihr erst richtig eingeprägt. Zustimmendes Nicken in der Runde einschliesslich der anwesenden Erwachsenen.“ als eine wichtige Erfahrung. Aus diesem ersten Prozess ergibt sich derjenige Beweis, der Beweis des Anairizi, den wir gemeinsam intensiver analysieren, an dem exemplarisch das „Beweisen als ein Mittel, verstehen zu lernen“ (Berg/Schulze 1997, S. 75) ins Zentrum rückt. Wie bei Nölle folgen Pythagoras und seine Lehre. Die Hinführung auf die Äquivalenzaussage dieses Satzes scheint mir in diesem Lehrstück bei den sechzehnjährigen Jugendlichen verfrüht, müssen sie doch vorerst einmal mit der Grundidee des Beweisens bekannt werden.

Die Beweisvielfalt ist bei mir noch ausgeprägter als bei Nölle. Meine Schülerinnen und Schüler des 9. Schuljahrs können mit dem eigenen Analysieren und Präsentieren stärker gefordert werden. Ein Übungsfeld entsteht und die Palette individueller Zugänge zum Beweis wird grösser. Die Idee des Lieblingsbeweises, wie sie Nölle durchführt, finde ich genial. Ich verlange sogar, dass er gelernt wird. Dabei geht es ja nicht um das blosse Auswendiglernen eines Textes, sondern um die Auseinandersetzung und das Einprägen einer logischen Gedankenkette. Gerade dies ist ja fundamentale Mathematik. Mit dem Beweis des Euklid gelange ich organisch in die „Elemente“ zum Aufbau der Euklidischen Geometrie und damit zu einem von Wagenschein formulierten „Funktionsziel“ des mathematischen Unterrichts, die „Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“ (1980, S. 262). Wir wagen einen Blick in die Tiefe zu den Fundamenten und wieder zurück auf das erste Hochplateau mit dem Satz des Pythagoras, aber auch einen Blick in die Breite, in andere Wissensgebiete, wo es nicht dasselbe Mass an Gewissheit gibt wie in der Mathematik. Ein weiteres „Funktionsziel“ von Wagenschein (ebd. S. 263) ist angesprochen.

Anschliessend folgt bei mir ein grösserer Block von geometrischen und algebraischen Übungen und Anwendungen samt den dazu notwendigen Wurzelgesetzen. Diesen Teil habe ich ins Lehrstück integriert. Viele Schülerinnen und Schüler sind froh, dass sie die Sätze *endlich* anwenden dürfen. Wir haben hier eine Grundsatzfrage: Werden Übungsaufgaben ins Lehrstück integriert oder im Nachgang bearbeitet? Diese Frage muss je nach Lehrstück und Umstände beantwortet werden. Bei Nölle drängte sich ein Abschluss ohne Übungsphase vor den Ferien auf. In einem längeren Lehrstück kann eine eingeschobene Verarbeitungsphase vorteilhaft sein. Die Fortsetzung des Gesamtprozesses bis zum Abschluss wird allerdings erschwert, sie muss gewährleistet bleiben. Die Ausweitung mit dem klassischen Quadraturproblem und die Verwandlungsstudien von Wyss öffnen das Feld und führen zum bildlichen Abschluss mit Überblick und Feedback über den ganzen Prozess.
Bei Nölle braucht das Lehrstück 19 Lektionen, bei mir 23 Lektionen. Der Unterschied liegt vor allem im ausgedehnteren Übungsteil samt Wurzelgesetzen und in der Vertiefung mit den „Elementen“ des Euklid.

Bezug nehmend auf die sechs Stufen des Kennens von Wagenschein (S. 265) ergibt sich:

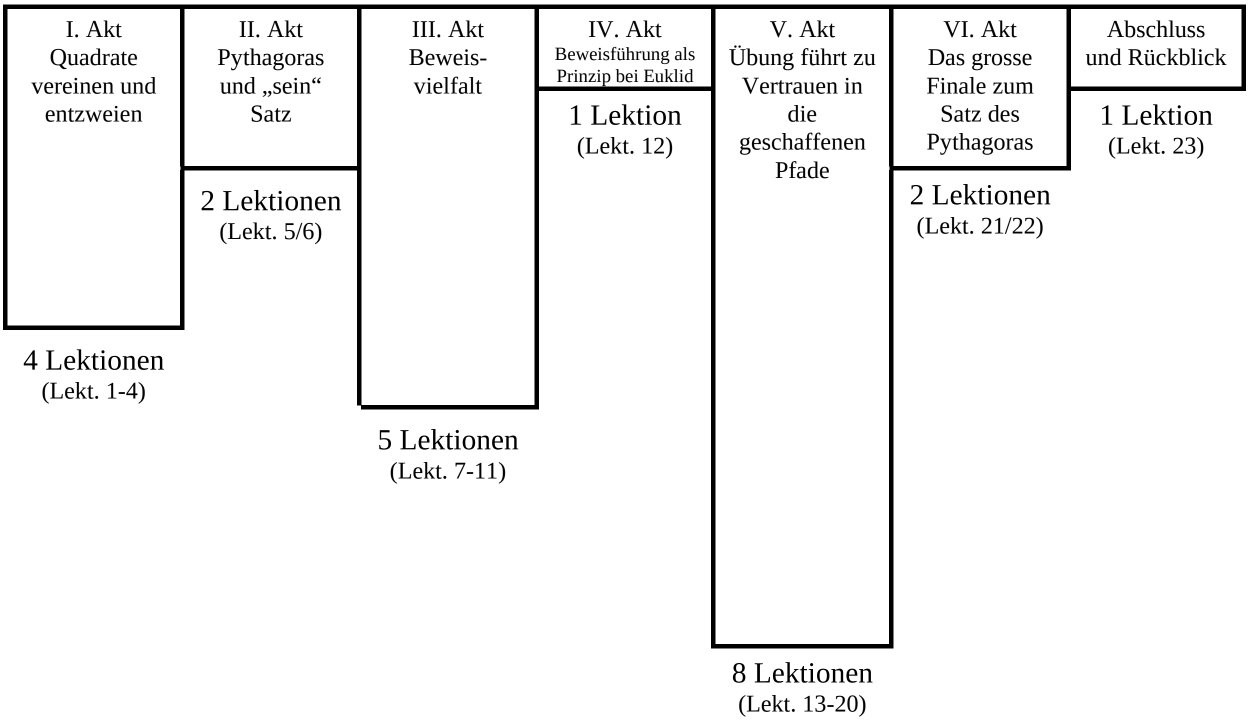
A. Lokale Kenntnis	
I. nur verbal (im Wortlaut)	Dies ergibt sich nebenbei.
II. nur technisch (verfügbar)	Dies wird in einem ausgedehnten Übungsteil erarbeitet.
III. einsichtig (verstehend)	Dies geschieht durch Erarbeitung der Vereinigung der Quadrate, eingehende Vorbereitung und Präsentation von Beweisen und am meisten durch das Lernen des Lieblingsbeweises, der jedem den individuell einsichtigsten Weg erschliesst.
B. Exemplarische Kenntnis:	
IV. fachmethodische Schulung	Im Vorbereiten und Präsentieren, im Mitvollziehen und im Aneignen des Lieblingsbeweises lernen die Schülerinnen und Schüler das Beweisen.
V. neue Stoffe (systematisch angliedern)	Innerhalb des Lehrstücks können nur erste Ausblicke eröffnet werden mit Verallgemeinerungen in die Kreisberechnung (Zahl π), in die Ähnlichkeitslehre und in die Trigonometrie. Der Aufbau der Geometrie verweist auf andere Wissenschaften.
VI. Wissenschaftstheoretische (kategoriale) Betrachtung	Anhand der Beweise von Anairizi und Euklid befassen wir uns mit den grundsätzlichen Fragen von Beweisen, von Gewissheit und vom „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“.

1.4 Unterrichtsverlauf: 23 Lektionen in der Quarta

Im Folgenden wird eine Inszenierung des Lehrstücks in 23 Lektionen beschrieben. Die Klasse 4B hat vor drei Monaten, im August 2002, neu am Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld die Quarta, unser 9. Schuljahr, begonnen. Die 6 Schülerinnen und 13 Schüler kommen aus verschiedensten Schulen mit ganz unterschiedlichen Vorbereitungen. Erfahrungsgemäss haben einige von ihnen bereits den Satz des Pythagoras kennen gelernt und evtl. sogar ein wenig damit gearbeitet, für andere ist dies Neuland. Die Klasse ist wenig leistungsorientiert und neigt zu Unkonzentriertheit. Deshalb sind Gruppenarbeiten und Phasen des individuellen Arbeitens besonders heikel.

Nachdem wir uns vorwiegend mit Zahlmengen, Bruchtermen, algebraischen Umformungen und dem Lösen von linearen Gleichungen befasst haben, steigen wir am 7. November 2002 gemäss Stundenplan mit einem Block von drei Lektionen ein in dieses Lehrstück zur Geometrie, das uns ziemlich genau einen Monat beanspruchen wird.

Es wird sich die folgende zeitliche Gliederung ergeben:



Lektionen 1/2/3

I. Akt: Quadrate vereinen und entzweien

20 Stühle stehen im Kreis, auf jedem der Stühle liegt ein andersfarbiges Papierquadrat, wobei es 9 gleichgrosse grosse und 11 gleichgrosse kleine Quadrate sind. Darum herum gibt es 6 kleine Tischgruppen, bei jeder liegen Schere, Lineal und weisse Quadrate. Die Schülerinnen und Schüler nehmen die Quadrate in die Hand und setzen sich in den Kreis. Jedes merkt sich sein Quadrat und legt es dann gespannt in die Mitte. Azra und Fabian erklären sich bereit, während dieser ersten Phase Protokoll zu führen: Azra notiert das Gespräch und Fabian den Ablauf und möglichst viele persönliche Beobachtungen.

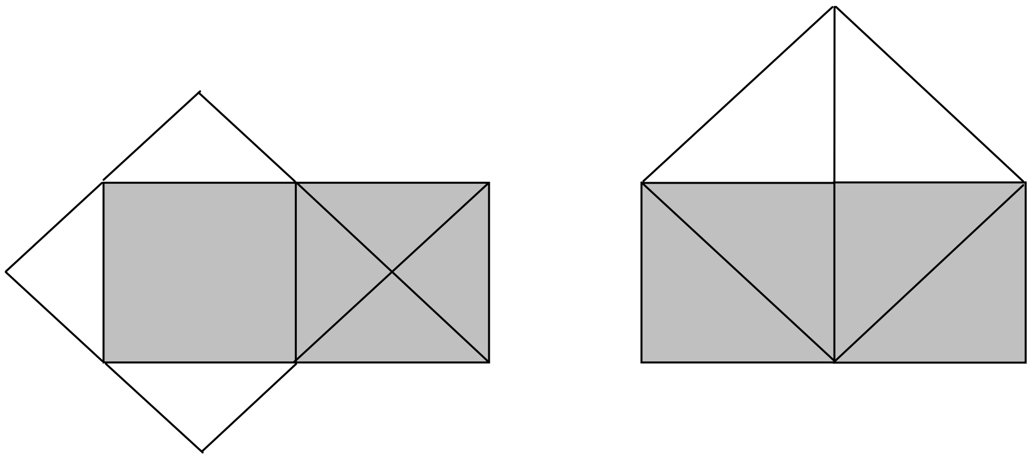
Ich eröffne: „Mit diesen 20 verschiedenen Papierquadraten steigen wir heute in ein neues Thema der Geometrie ein. Merkt euch euer persönliches Quadrat und legt es dann in der Mitte auf den Boden. Lasst sehen, ob es uns gelingt, all diese Papierquadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen.“
Mehmet: „Wozu machen wir das?“
Ich: „Auch dies ist Mathematik. Wir werden viel entdecken und lernen dabei. Lass dich überraschen!“
Hannes: „Es kommen zwei grosse auf drei kleine Quadrate.“
Simon probiert am Boden: „Das geht nicht.“
David: „Können wir sie übereinander legen?“ Ich schüttle den Kopf. „Dann geht es nicht.“
Alle sind am Studieren. Es gibt Geflüster, kurze Ideenaustausche zu zweit.
Lukas kommt als erster in die Mitte und probiert, die Quadrate zusammenzusetzen, es geht aber nicht. Beatrice versucht es anschliessend, es sieht quadratisch aus, aber wie ich die Quadrate genauer hinlege, wird klar, dass es so auch nicht aufgeht.
Nochmals David: „Wir schneiden die Quadrate in Dreiecke.“

Simon hakt nach: „Geht es überhaupt auf? Ist die Aufgabe überhaupt lösbar?“ Die Antwort bleibe ich ihm schuldig.
Marc: „Überflüssiges lässt sich wegschneiden und an den Seiten hinzufügen.“
Urs: „Wir können alles in Dreiecke zerschneiden.“
Monique: „Müssen alle Quadrate gebraucht werden?“
Lukas: „Mit den kleinen Quadraten allein könnte man auch kein Quadrat machen, zwei sind zuviel.“
Patrice versucht 7 kleine neben 4 grosse zu legen. Es geht aber auch nicht.
Ich: „Könnten wir das Problem lösen, wenn wir nur die kleinen Quadrate hätten?“
Lukas meint ohne Begründung: „Nur mit den kleinen Quadraten geht es nicht.“ – Lukas lehnt zurück und gibt für einen Moment auf.
Gabriel: „Man könnte ein 3 x 3 – Quadrat legen, aber dann gäbe es 2 Reste.“ – Die kleinen Quadrate werden so hingelegt.
David: „Die überzähligen Quadrate müsste man verbrennen oder essen.“
Ein paar Schülerinnen haben Papier hervorgeholt und sind am Zeichnen. Jasmin kann aber ihre Ideen noch nicht formulieren.
(nach einer Weile) nochmals Gabriel: „Wie lang sind die grossen, und wie lang die kleinen?“
Ich signalisiere ihm, dass wir es nicht wissen.
Beatrice legt auch die grossen zu einem einzigen Quadrat.

In den verstrichenen gut 20 Minuten sind wir schon beträchtlich fortgeschritten. Es liegen im Prinzip nur noch vier Quadrate vor uns und die Idee, die Quadrate zu zerschneiden ist bereits gefallen. Es wird ein Leichtes sein, die zwei gleich grossen kleinen Quadrate zu vereinen und dann auf das zentrale Problem, das Vereinen von zwei verschieden grossen Quadraten zuzusteuern.

Ich: „Die Anzahl der Quadrate haben wir bereits von 20 auf 4 reduziert! Ist dies nicht ein grosser Fortschritt?“
Lukas: „Wir könnten halbieren und oben und unten anhängen.“
Adrian: „Man könnte aus den zwei kleinen ein grösseres Quadrat machen.“
David ergänzt: „Dann hätten wir noch drei Quadrate.“
Lukas: „Aus den zwei gleich grossen könnte man ein grosses machen. Aber wie?“
Marc: „Man könnte das eine Quadrat in 4 Dreiecke schneiden.“
Michael E: „Man könnte immer mehr halbieren.“
Thierry wiederholt, was Marc bereits meint: Wir teilen ein Quadrat in 4 Dreiecke. Und dann haben wir nur noch 3 Quadrate.“
Eine halbe Stunde ist vorbei. Da sich die Erkenntnis durchzusetzen scheint, bitte ich die Schüler und Schülerinnen, sich auf die Tischgruppen zu verteilen und die Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten durchzuführen. Zwei Gruppen sind sehr rasch fertig und ich

ermuntere diese, noch eine zweite Lösung zu finden. – Nach weniger als fünf Minuten sind wir wieder im Kreis und tauschen die verschiedenen Varianten aus. Ich lasse vorzeigen. Wir diskutieren darüber, warum es wirklich wieder ein Quadrat gibt und veranschaulichen die verschiedenen Verwandlungen von den zwei Quadraten zu einem und wieder zurück: mit Drehen und mit Verschieben.

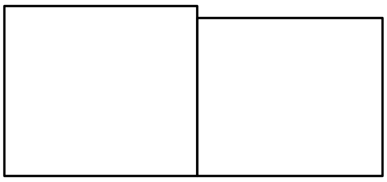


Nach der Pause nehmen wir den Faden wieder auf.
Ich: „Jetzt haben wir also die Anzahl der Quadrate von zwanzig auf drei reduziert!“
Michael E: „Man könnte alle Vierteln. Aus allen Quadraten Dreiecke machen.“
Lukas äussert eine Vermutung: „Es geht um Wurzeln.“
Michael E ergänzt: „Es geht um Pythagoras. – Alle Vierteln ergäbe mehr Möglichkeiten.
– Durch Dreiecke haben wir die Anzahl auf 3 heruntergebracht.“
David: „Wir haben ein Durcheinander, ein „Gnusch“.“
Simon: „Wenn zwei Quadrate gleich gross sind, können wir sie auf ein Quadrat reduzieren.“
Michael W: „Wenn wir eine gerade Anzahl grosse und eine gerade Anzahl kleine hätten, würde es vielleicht gehen.“
Wiederum wird mehrheitlich versucht, die Aufgabe in einem Schritt zu lösen.
Michael E: „Wir könnten vier kleine Quadrate als Kern nehmen, die anderen in Dreiecke teilen und den Kern damit umranden.“
Gabriel: „Wir müssten einen gemeinsamen Nenner finden, vielleicht ein Grosses Quadrat achteln.“
Michael E: „Wir nehmen vier kleine Quadrate als Kern, die anderen teilen wir in Dreiecke und dann probieren wir darum einen Rand zu machen, um ein ganzes Quadrat zu machen.“
Gabriel sieht sofort: „Es gäbe aber Rest.“
Beatrice versucht erneut auf dem Boden und Gabriel kommt ihr zu Hilfe. Beide machen weiter unter der Anleitung der Klasse. Es will aber nicht gehen.
Der Prozess ist am Stagnieren, die Gedanken gehen wieder weit weg vom bereits Erreichten. Zudem werden einzelne Schülerinnen und Schüler unruhig, verlieren die Konzentration.
Ich versuche, mit Uferhilfe zurückzulenken: „Was haben wir bereits erreicht?“ – ???? –
„Wie schon erwähnt, können wir die Anzahl der Quadrate von 20 auf 3 reduzieren; und es gelingt uns, zwei gleich grosse Quadrate zu einem einzigen zu vereinen.“ – ??? –
Die Energie und das Vertrauen scheinen zu fehlen. Es braucht offenbar gezieltere Lenkung meinerseits: „Würde es uns helfen, wenn wir aus zwei verschieden grossen Quadraten ein einziges Quadrat herstellen könnten.“ – Jetzt hängen einige wieder ein: „Ja sicher, aber können wir das?“ Jetzt sind wir beim Kern des Problems. Ich schicke die Schülerinnen und

Schüler wieder an die Tische mit dem Auftrag, zwei verschieden grosse Quadrate zu nehmen und zu versuchen, diese zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Es ist kurz nach 10 Uhr.
In den Gruppen wird intensiv „geschnipselt“.

Es folgen ein paar Beobachtungen und aufgeschnappte Sätze aus der Gruppenarbeit: Gabriel: „In Dreiecke teilen.“ Er schneidet intensiv und legt eine schöne quadratische Schlussfigur. Stolz zeigt er sie mir. – Ich bitte ihn dasselbe nochmals zu machen mit zwei ganz unterschiedlich grossen Quadraten. Er sieht sofort, dass es dann nicht geht. Gabriel probiert erneut konzentriert auf eine andere Art. Er will alles in gleiche Quadrate schneiden, meint aber schliesslich: „Es geht nicht, 3 bleiben übrig.“ Adrian: „Man muss sie in ganz kleine Teilchen teilen, feiner als Sand, *pulverisieren*.“ Diese sehr interessante Ansicht habe ich in andern Klassen auch schon gehört. Dahinter steckt die Hoffnung, dass man nur genügend kleine Quadrätchen machen muss, und es dann irgendeinmal sicher aufgehen wird. Diesen Gedanken weiterzuverfolgen bis ins unendlich Kleine, in die Irrationalität, wäre spannend, würde den Rahmen des Lehrstücks aber völlig sprengen. Daneben sind Michael E. und Adrian anderweitig kreativ tätig. Ihre Figur landet am Ende eingeklebt im Klassenbuch.

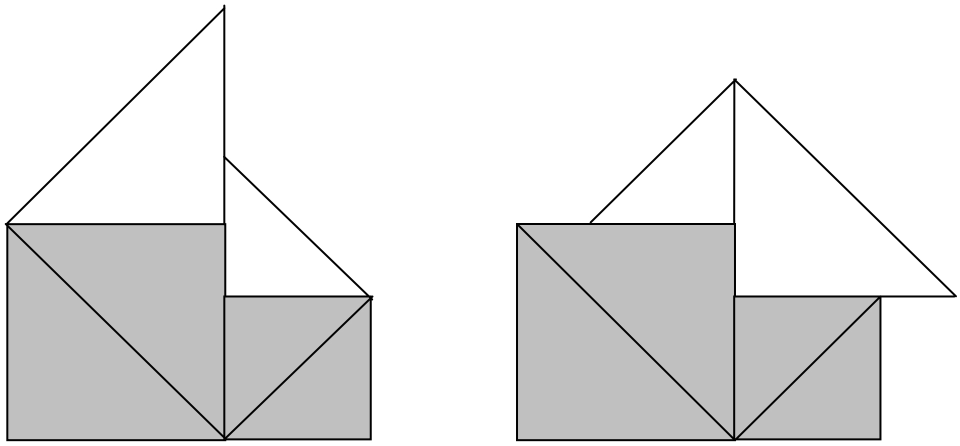
In dieser Zeit notiere ich kurz an der Tafel den Titel:
I. Akt: Quadrate vereinen, den bisher gegangenen Weg und zeichne die gefundenen Zerlegungen (wie oben) sowie nebeneinander zwei verschieden grosse Quadrate.



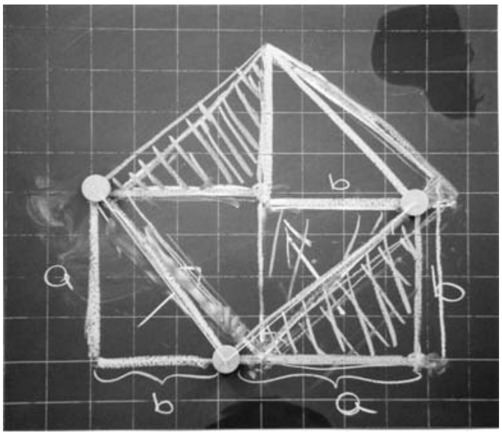
Es wird weiterhin viel geschnipselt, zerlegt, zusammengesetzt, diskutiert, verworfen, . . . Da und dort höre ich: „Das geht gar nicht.“ Was Wagenschein (1982 S. 127) über das Quadrat schreibt, gilt auch treffend für obige Figur: „Aber es ist bemerkenswert, wie schnell sich der Beweis aus zwei Translationen ergibt. Auf diesen Gedanken zu kommen, dauert eine Weile, vermutlich weil es einem unbewusst widerstrebt, die Figur zu durchkreuzen, als könne sie dabei Schaden nehmen.“

Vielleicht wäre es vorteilhaft, an geeigneter Stelle zu empfehlen, die beiden Quadrate mit einem Klebband zusammenzukleben, zu ermutigen, dass es mit ganz wenigen Schnitten geht und zu erwähnen, dass bereits vor 2500 Jahren eine genial einfache Lösung gefunden wurde.

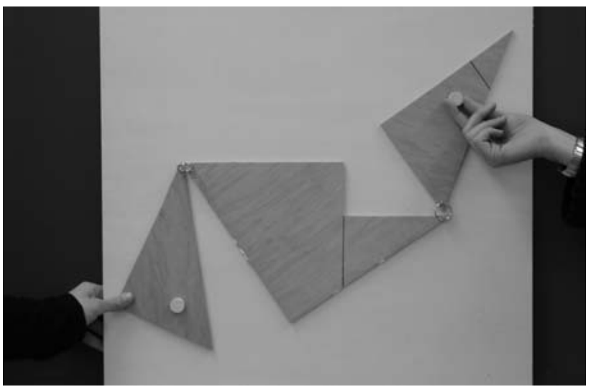
Kurz vor Ende der Lektion wäre es Zeit zu unterbrechen und gemeinsam weiterzudenken, aber ich lasse den Gong diese halbstündige Sequenz beenden. Zu Beginn der dritten Lektion sind alle wieder im Kreis versammelt. Nochmals weise ich auf die Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten hin. Nahe liegend ist es ja, was viele probiert haben, dass wir auch bei zwei verschieden grossen Quadraten diagonal schneiden. Aber warum versagt diese Methode? Ich lasse nebeneinander beide Situationen zeichnen: einmal nach dem Drehen, einmal nach dem Verschieben. Und warum ergibt sich kein Quadrat? Ich hoffe, dass auf der einen oder andern Seite ein Durchbruch erfolgen könnte.



Urs und Gabriel versuchen erfolglos verschiedene Varianten. Ich: „Wie müssten die Dreiecke beschaffen sein, damit die oben hinpassen?“ – ??? – „Warum kommen bei der Verschiebung oben beide Dreiecke zusammen?“ Es wird gut erkannt, dass wir beide Male in der Höhe die kleine und die grosse Quadratseite zusammenfügen. Aber links und rechts will es nicht



passen. – ??? – „Wie ist’s, wenn das rechte Dreieck nicht so weit hinaus ragt? Könnt ihr euch das vorstellen?“ Gabriel: „Dann müssen wir unten weiter hinüber schneiden.“ Ich lasse ihn wieder zeichnen. Ich: „Und wo haben wir jetzt unser neues Quadrat?“ Nach einigem Hinsehen, kann er es richtig ergänzen. – Urs sieht die Zusammenhänge und erläutert mit Bezeichnungen a und b die nötigen Längen. Langsam scheint sich die Einsicht zu verbreiten. Michael W. bemerkt als erster folgerichtig, dass wir damit unsere drei Quadrate in zwei Schritten zu einem einzigen Quadrat vereinen können. Ob dies wirklich schon allen klar ist? Mit drei Magnetknöpfen und einem Gummiband verdeutlichen wir den kleinen, aber entscheidenden Übergang von den Diagonalschnitten zur neuen Zerlegung. Das Tafelbild zeigt deutlich das zähe Ringen um die Lösung dieses widerspenstigen Problems. Beim Schneiden die Diagonale zu verlassen, gleicht einem Quantensprung, einem Paradigmenwechsel. Wir veranschaulichen diesen Prozess an einem Holzmodell, an dem die Schüler die Dreiecke drehen können. Die Zerlegung muss von jedem



einzelnen konkret durchgeführt werden! Deshalb bitte ich die Schülerinnen und Schüler wieder in die Gruppen, um jetzt diese Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten zu erfahren. Noch braucht es an einigen Tischen hartes Ringen, während andere bereits fertig sind. Anschliessend halten alle den Verlauf dieser drei Lektionen in ihren Heften fest und kleben die Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten ein.

Zum Abschluss dieser Stunde erwähne ich, dass das Problem, zwei verschieden grosse Quadrate zu vereinen, bereits in einem alten religiösen Text aus Indien, den sogenannten Sulbasutras (d. h. Schnurregeln oder Leitfäden zur Messkunst), geschrieben etwa 500 vor Christus, zu finden ist. Dort steht auch eine Lösung, welche vergleichbar ist mit derjenigen, die wir entdeckt haben. Da die indischen Tempel und Altäre quadratische Grundrisse haben, ist anzunehmen, dass die Grundrisse der Tempel von Brahma, Shiva und Vishnu, dies ist das göttliche Dreigestirn im Hinduismus, diese Bedingung erfüllen sollten. (Scriba/Schreiber 2001, S. 146f) Die Zerlegung, so wie wir sie entdeckt haben, wird üblicherweise aber dem arabischen Gelehrten Anairizi zugeschrieben, welcher um 900 nach Christus wirkte.

Zwar ist das Gemeinschaftswerk noch nicht vollendet, aber wir wissen jetzt, wie wir unsere 20 Quadrate des Anfangs zu einem einzigen Quadrat vereinen können. Damit endet unsere dritte und letzte Lektion dieses heutigen Morgens. Der Auftrag für die nächste Lektion besteht darin, den Hefteintrag zu bereinigen und ein Quadrat zu entzweien, so dass aus den Teilen zwei verschieden grosse Quadrate gelegt werden können.

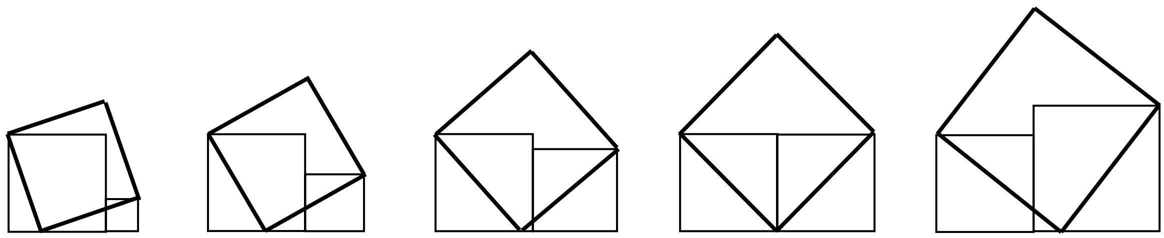
Wenn auch etwas mühsam, so ist es doch auch mit dieser leistungsschwachen Klasse gelungen, die wesentliche Grundidee der Vereinigung von zwei Quadraten und damit des Satzes von Pythagoras zu entwickeln. Das Vereinen und das Entzweien, beide müssen noch ausführlich diskutiert sein. Und das Gemeinschaftswerk, die Vereinigung unserer 20 Quadrate, ist noch nicht durchgeführt. Im Feedback am Schluss erfahren wir, dass das Ausprobieren, die Selbsttätigkeit geschätzt wird, allerdings für viele der Prozess zu lange dauerte. *Nächstes Mal werde ich den Einstieg in einer Doppelstunde durchführen und mich dann überraschen lassen, ob die Lösung des Spezialfalls in der kommenden Stunde mitgebracht wird.*

Unterstützung für diesen Ansatz mit dem Vereinen der Quadrate, fortschreitend vom speziellen zum allgemeinen Fall, erhalten wir von Prof. Peter Baptist, Universität Bayreuth, in seinen Büchern 1998 und 2000. Insbesondere im zweiten Werk (Baptist 2000, S.8) plädiert er: „…Denken lernt man nicht an Regeln zum Denken, sondern an Stoff zum Denken.“ Als eines der Beispiele empfiehlt er, den Satz des Pythagoras, der ja ein Flächensatz ist, anzugehen über das Problem (S.12ff): „Aus zwei gegebenen Quadraten soll ein einziges flächengleiches Quadrat erzeugt werden.“ Dabei beruft er sich auf den französischen Mathematiker Alexis Claude Clairaut (1713-1765), der in seinem Lehrbuch „Elemente der Geometrie“ diese heuristisch-genetische Darstellungsweise wählt. Dass allerdings das Problem dynamischer Geometrie mit Hilfe eines Softwarepakets wie GEONET gelöst werden muss, bezweifle ich sehr.

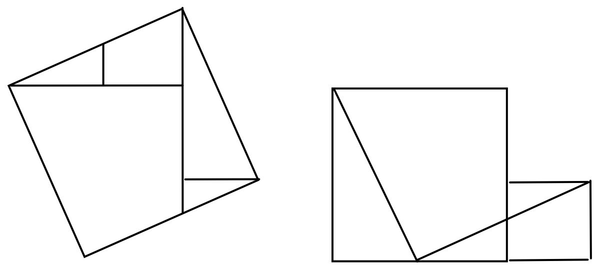
Lektionen 4/5

Ich: „Heute wollen wir das Vereinen und Entzweien von Quadraten noch genauer ansehen und Folgerungen ziehen.“ Dazu lese ich einen Text von J. W. Goethe: „Treue Beobachter der Natur, wenn sie auch noch so verschieden denken, werden doch darin miteinander übereinkommen, dass alles was erscheinen, was uns als ein Phänomen begegnen solle, müsse entweder eine ursprüngliche Entzweiung, die einer Vereinigung fähig ist, oder eine ursprüngliche Einheit, die zur Entzweiung gelangen könne, andeuten und sich auf eine solche Weise darstellen. Das Geeinte zu entzweien, das Entzweite zu einigen ist das Leben der Natur; dies ist die ewige Systole und Diastole, die ewige Synkrisis und Diakrisis, das Ein- und Ausatmen der Welt, in der wir leben, weben und sind.“ (Goethe 1980, S. 267)

An der Tafel habe ich bereits nebeneinander sechsmal zwei Quadrate gezeichnet, die vereinigt werden wollen. Verschiedene Schüler und Schülerinnen bitte ich gleichzeitig, die Zerlegung und das entstehende Quadrat einzuzeichnen. Zum Teil mit Mühe gelingt es bald allen. In einer dynamischen Variante haben wir jetzt die Grundidee dieser Vereinigung der beiden Quadrate vor Augen.

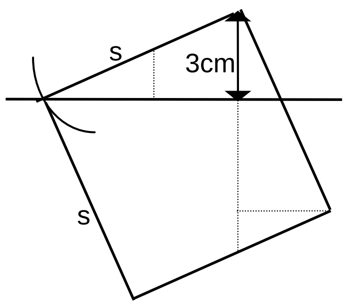


In der Zwischenzeit gehe ich durch die Klasse und stelle fest, dass viele Schülerinnen und Schüler nichts in ihr Heft eingeklebt haben. Was soll ich davon halten?



Ich hänge ein grosses weisses Quadrat schräg an die Tafel. Wie können wir das Quadrat schneiden, so dass nachher beim Zusammensetzen zwei verschieden grosse Quadrate entstehen können? Nach längerem Zögern kommt Roman und zeichnet einige richtige Linien ein. Ich schaue fragend in die Runde. Urs putzt eine Linie weg, die nicht nötig sei. Geklärt wird noch, wo zusätzlich geschnitten werden muss, damit die beiden entstehenden Quadrate separat entstehen können. Stehen die beiden Figuren geeignet nebeneinander, so ist die Zerlegung offensichtlich. Da keine Fragen vorhanden sind, verteile ich farbige Quadrate und bitte die Schülerinnen und Schüler, auf zwei Quadraten die gleiche Zerlegung einzuzeichnen, eines zu zerlegen und neu zusammenzusetzen, sowie alles im Heft einzukleben. Für diejenigen, die fertig sind, notiere ich an der Tafel die folgende Aufgabe: Gegeben ist ein Quadrat mit Seitenlänge $s = 6.5$ cm. Konstruiere eine Zerlegung so, dass eines der neuen Quadrate Seitenlänge 3 cm hat. Damit sind einige überfordert. Wer weiss schon, dass die Tangente eines Punktes an einen Kreis mit dem Thaleskreis konstruiert wird?

Es folgt die erlösende Pause. Michael W. kommt noch nach vorn und will wissen, wie die Konstruktion mit dem Thaleskreis geht. Wir klären dieses Problem bilateral anhand einer Skizze an der Tafel.



Zu Beginn der zweiten Lektion erklärt Michael die Konstruktion.

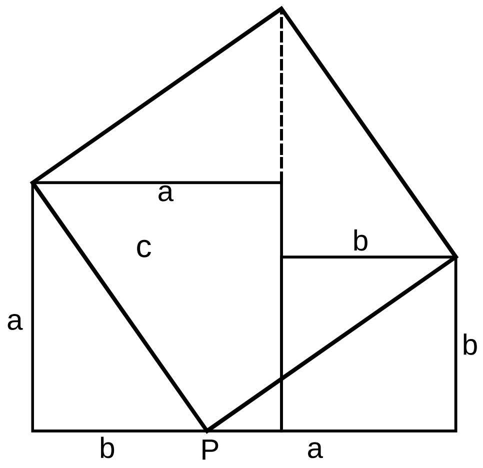
Roman macht es ganz anders: Er beginnt mit einer 3 cm langen Vertikalen, fällt darauf die Senkrechte und legt jetzt erst das Quadrat hinein. So kann er den Thaleskreis umgehen.
Ich lasse die Konstruktionen beenden.

Wer fertig ist, soll sich genau überlegen, warum bei unserer ursprünglichen Vereinigung der zwei Quadrate wirklich ein einziges Quadrat entsteht.

„Es ist ja schon gesagt worden, dass das, war wir hier machen, etwas mit dem Satz des Pythagoras zu tun hat, von dem offenbar die meisten schon mehr oder weniger gehört haben. Und diesen Satz wollen wir jetzt beweisen mit Hilfe unserer Zerlegung der Quadrate."

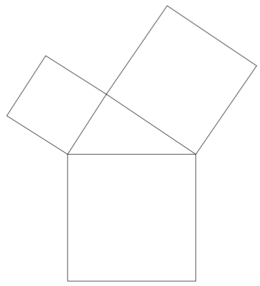
II. Akt: Pythagoras und „sein" Satz

An der Tafel notiere ich die Überschrift. Wir haben die Grundfigur samt Bezeichnungen vor uns. Leitfrage: Warum ergibt sich durch diese Schnitte und das obige Einfügen der Dreiecke ein Quadrat? Wir haben die Zerlegung an einigen Beispielen durchgeführt und gesehen, dass wir ein Quadrat erhalten. Aber gibt es wirklich ein Quadrat? Wir könnten die Seiten und die Winkel überprüfen durch Nachmessen. Messinstrumente sind aber nicht genau, lassen immer viel zu Wünschen übrig. Zudem könnten wir nie alle verschiedenen Ausgangssituationen überprüfen, wüssten also nicht, ob dieses Verfahren bei beliebigen zwei Quadraten gilt. Ausserdem hätten wir noch lange keine Einsicht, warum es so ist, so sein muss. Deshalb ist eine allgemeine Begründung, ein Beweis gefordert. Dieser eröffnet eine neue Dimension der Sicherheit und des Verständnisses.



Urs hat sich schon ganz auf den Satz des Pythagoras konzentriert und zeigt, wie sich aus dieser Figur die bekannte Pythagorasfigur ergibt, indem er das kleine Quadrat mit Seite b nach rechts schiebt und das grössere mit Seite a nach rechts unten und erklärt, so jetzt hätten wir bewiesen, dass das obige c^2 sei. Es ist schwierig ihm klar zu machen, dass wir jetzt nicht den Satz des Pythagoras voraussetzen, sondern vielmehr ihn schlussendlich beweisen wollen. Aber für seinen Übergang von dieser Figur zur Pythagorasfigur, wie sie viele schon kennen, sei ich ihm sehr dankbar.

Für ein Schnörkel zum Einprägen der typischen Figur frage ich: „Könnt ihr mit einem Strich ohne abzusetzen die Pythagorasfigur zeichnen?" Alle probieren: Es geht!



Zurück zum Beweis: Mit Papierdreiecken komme ich zu Hilfe. Ich drehe das Dreieck von unten links und hefte es oben an, ebenso das zweite von unten rechts. Dass sie hineinpassen, a auf a, b auf b und die rechten Winkel haben wir schon besprochen. Ebenso haben wir gezeigt, dass ganz oben die beiden Eckpunkte zusammenfallen, da wir in der Höhe links a + b und rechts b + a finden. Also ergibt sich ein neues Viereck. Und was können wir sagen über dieses Viereck? Wieder höre ich vorschnell: „Es ist ein Quadrat, weil alle Seiten gleich lang sind." Ich: „Und warum ist das so." Es ist schwierig zu entschleunigen, die einzelnen Schritte nicht überspringen zu lassen. „Warum sind alle Seiten gleich lang?" Es braucht viel Hilfe: „Was lässt sich über die beiden weg geschnittenen Dreiecke sagen?" Endlich eine konstruktive Antwort: „Man kann sie zur Deckung bringen." – „Warum dies?" – „Weil sie drei gleiche Seiten haben." Mit dem logischen Denken ist es schwierig. „Was haben die zwei Dreiecke sicher gemeinsam?"
Mit meinem dauernden Hinterfragen, mit meinem „Warum?" wirke ich wohl penetrant. Mir kommen die Kinder im Alter von 3 bis 4 Jahren in den Sinn, die ihren Eltern mit dem gleichen „Warum?" Löcher in den Bauch fragen. Eine Rollenumkehr! Langsam dämmert es: „Die beiden Dreiecke haben einen rechten Winkel und die Seiten a und b gemeinsam. Und

damit wissen wir, dass wir sie zur Deckung bringen können?“ – ??? – Ich sondiere weiter: „Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Dreiecke zur Deckung bringen?“ – „Wenn sie drei gleiche Winkel haben.“ – „Wenn sie gleiche Seiten haben.“ Ich merke, dass da wenig Grundlage vorhanden ist. Immerhin fallen die Begriffe „deckungsgleich“ und „kongruent“. Konkret frage ich: „Unter welchen Voraussetzungen sind zwei Dreiecke kongruent?“ Bei Raffael und Daniel höre ich etwas munkeln wie „SWS“. Ich frage nach: „SWS? Was bedeutet das?“ – „Seite – Winkel – Seite“. Schliesslich kommt die klare Antwort: „Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.“ – „Mit diesen Angaben lässt sich ein Dreieck eindeutig konstruieren: Winkel zeichnen, auf jedem Schenkel vom Scheitelpunkt eine Seite abtragen und die Endpunkte verbinden. Fertig!“ Ich kann es nicht lassen, bei dieser Grundlage weiterzufragen: „Gibt es andere Kongruenzsätze?“ Langsam und unsicher kommen die übrigen drei Kongruenzsätze nach. Es wird mir bestätigt, dass diese Sätze behandelt wurden, aber zum Arbeiten sind sie nicht genügend verankert. Da es demnächst eine Gelegenheit gibt, diese Sätze zu repetieren, gehe ich nicht weiter auf sie ein.

Wir kehren zurück zu unserem Beweis: „Und warum sind die beiden Dreiecke kongruent?“ Die richtige Antwort kommt von Roman: „Weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen (dem rechten) Winkel übereinstimmen.“ – Und wieder das Schnellzugstempo: „Daraus folgt, dass das Viereck ein Quadrat ist.“ Langsam, langsam! „Also, diese längsten Dreieckseiten, die Hypotenusen, sind deshalb gleich lang und somit hat unser Viereck vier gleich lange Seiten.“ Einzelnen dämmert, dass das noch kein Quadrat sein muss, sondern erst ein Rhombus, und dass wir noch die Winkel ansehen müssen. Auch da braucht es noch einige Detailarbeit, bis gesichert ist, dass wir beim Punkt P einen rechten Winkel haben. Mit Bezeichnungen α und β für die Winkel bei P ergibt sich langsam Klarheit. Wegen der Winkelsumme von 180° im Dreieck und dem rechten Winkel ergibt sich, dass damit auch α und β zusammen 90° ergeben. Dieselben Winkel finden wir in den Ecken des neu entstehenden Vierecks und somit ist es wirklich ein Quadrat. Wir haben unsere Begründung also abgestützt auf einen Kongruenzsatz (SWS) und auf die Winkelsumme im Dreieck.

Und somit gilt jetzt: $a^2 + b^2 = c^2$. Wir formulieren den Satz des Pythagoras: „Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.“ Es reicht gerade noch, den Satz und die ganze Argumentationskette Schritt für Schritt im Heft festzuhalten.

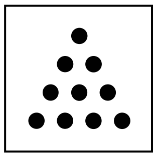
Am Ende der Stunde verteile ich jeder Schülerin und jedem Schüler ein Blatt, auf dem *ein* Beweis des Satzes von Pythagoras skizziert ist. Insgesamt sind es 6 verschiedene Blätter, also sechs verschiedene Beweise. Diese sollen bis zur nächsten Lektion zuhause studiert werden.

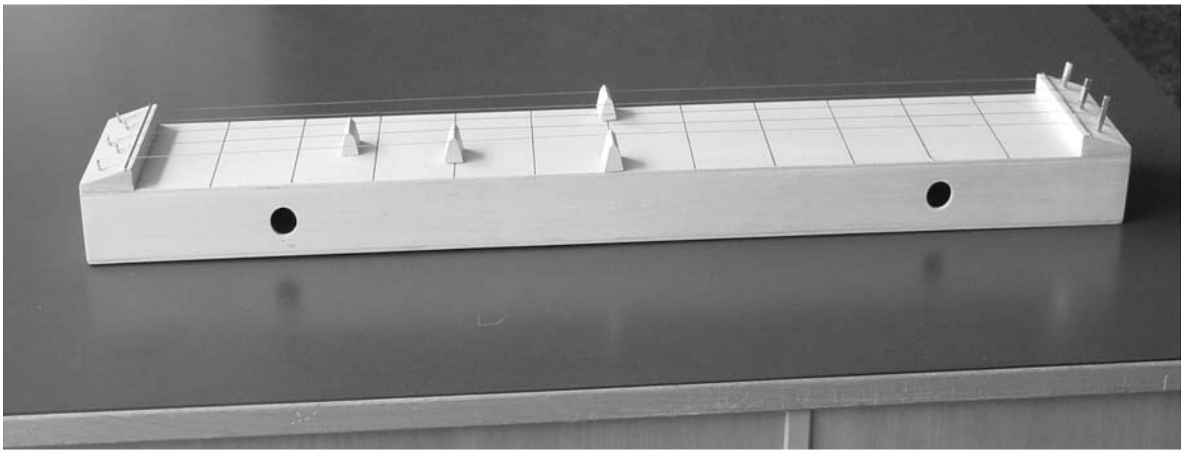
Eine interessante Alternative zum Verteilen der Blätter wäre es, die Schülerinnen und Schüler auf eine der Internetadressen wie www.cut-the-knot.com/pythagoras/index.html oder www.ies.co.jp./math/java/geo/pythagoras.html zu schicken, um dort auf Englisch einen wegen der angestrebten Beweisvielfalt im Unterricht wohl zugeteilten Beweisabschnitt zu studieren und die knapp gehaltenen Begründungen genau zu überlegen.

Lektionen 6/7/8

Die Schülerinnen und Schüler sitzen zu Stundenbeginn im Dreiviertelkreis. Ich gehe unauffällig noch ganz kurz hinaus, ziehe mir ein weisses Seidenhemd über und knüpfe eine Knotenschnur um den Bauch. Mit einem selbst gebauten Monochord unter dem Arm trete ich als ehemaliger Anhänger des Pythagoras auf und stelle mich vor: „Mein Name ist Prokulos von Kroton, ich war in einem früheren Leben Anhänger von Pythagoras und erinnere mich noch gut an jene Zeit in Süditalien. Da Sie Sich momentan mit dem berühmtesten mathematischen Satz befassen, der des Meisters Namen trägt, bin ich angefragt worden, ob ich nicht kommen könnte, um etwas über Pythagoras und die damalige Zeit vor über 2500 Jahren zu erzählen.

Nun, über Pythagoras selbst wussten wir auch nicht allzu viel, denn er lebte ziemlich zurückgezogen. Er muss etwa um 580 vor Ihrer Zeitrechnung auf Samos geboren worden sein, weilte in Jugendjahren zu Studienzwecken in Ägypten, wo er in die religiösen Riten eingeweiht wurde und wo er den Feldmessern bei ihrer Arbeit zuschauen konnte.“ Ich entbinde meine Knotenschnur und halte sie in die Luft. „Mit diesem Instrument haben die Ägypter jedes Jahr nach den grossen Überschwemmungen durch den Nil das Land neu mit rechten Winkeln abgesteckt und vermessen. Wie ging das wohl?“ – Ich muss die beiden Enden zusammenhalten und einen Ansatz von Dreieck vorführen, bis der erste Schüler sich meldet und sagt: „Wir könnten ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 herstellen und dann hätten wir einen rechten Winkel, denn 9 und 16 ergäben 25.“ Ich gebe die Schnur den zwei links neben mir sitzenden Schülerinnen und diese zeigen, wie es geht. – (Natürlich könnte ich jetzt nach weiteren derartigen Dreiecken suchen, aber dies würde aus meinem Auftritt wegführen.) – Also fahre ich mit meiner Beschreibung fort: „Nach seinem Besuch in Ägypten reiste Pythagoras nach Babylonien und vielleicht gelangte er sogar bis nach Indien. Zurück in Samos erlebte er die Herrschaft des grausamen Tyrannen Polykrates. Dies bewog Pythagoras, nach Kroton in Süditalien zu fliehen, wo er eine Gemeinschaft gründete, die sich ganz der Religion und der Wissenschaft widmete. Er besass prophetische Fähigkeiten, war Vegetarier und glaubte an die Gesetzmässigkeit einer Wiedergeburt von Mensch und Tier. Ich schloss mich dieser Gemeinschaft an, die anspruchslos und ohne Besitz lebte. Unser Meister vertrat die Auffassung, dass die Wirklichkeit der Natur im Innersten mathematisch sei. Gott habe den Kosmos nach Zahlen geordnet: *‚Alles ist Zahl‘*, *‚Das Wesen aller Dinge ist Zahl‘*, lautete unser Credo, wobei wir unter Zahl natürliche Zahlen oder das Verhältnis natürlicher Zahlen verstanden. *‚Alles, was man erkennen kann, lässt sich auf eine Zahl zurückführen.‘* Zahlen haben eine mystische Qualität und damit auch therapeutische Kraft. Die Zahl Zehn, die *tetraktis*, stellte für uns Pythagoräer eine göttliche Einheit dar. Denn sie ist gross, alles vollendend, alles bewirkend und Anfang und Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens. Gebildet wird sie als Summe von Eins, Zwei, Drei und Vier, den grundlegendsten und edelsten unter den Zahlen. All diese Zahlen zusammen bilden das göttliche Dreieck. Vor allem die Entdeckung eines konstanten Verhältnisses zwischen der Länge der Saiten bei einer Leier und den Grundakkorden der Musik beeindruckten ihn so stark, dass er sich Gott als grossartigen Ingenieur vorstellte und glaubte, ein mathematisches Gesetz, nämlich die Harmonie, bestimme die ganze Natur.“ Wir suchen einige wohlklingende Töne auf meinem Monochord. Es gibt Schüler, welche die Oktave, die Quinte und die Terz sofort erkennen. Es sind die einfachen Verhältnisse 1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quint, 3:4 für die Quart, 8:9 für die grosse Terz. Sogar eine kleine Melodie lässt sich spielen mit diesen wenigen Tönen. „Pythagoras war überzeugt, dass sich Erde, Mond, Sonne und die fünf damals bekannten Planeten nach demselben Gesetz der Harmonie auf ganzzahlig definierten kreisförmigen Himmelsbahnen drehen und dabei süsse Klänge erzeugen, die sogenannte Sphärenharmonie.





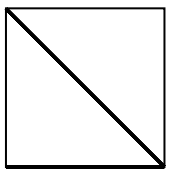
Wir Pythagoräer lebten also in Gütergemeinschaft und ganz einfach, waren Vegetarier und glaubten an die Seelenwanderung, eine Weltsicht, die Pythagoras sicher aus dem fernen Osten, vielleicht sogar aus Indien, mitgebracht hatte. Der Körper ist nichts anderes als ein Gefängnis, in dem die Seele für ihre Schuld büsst. So erklärt sich die pythagoräische Moral: „Immer schön brav, sonst geht's mit der Beförderung nicht weiter!" Neben strengen Regeln des täglichen Lebens hielten wir uns zusätzlich an absolute Verschwiegenheit.

Bei Sonnenuntergang stellten wir uns stets drei wesentliche Fragen:

a) Was habe ich heute Gutes getan?
b) Was habe ich heute Schlechtes getan?
c) Was habe ich heute versäumt zu tun?

Pythagoras und wir ‚mathematikoi' (Mathematiker) waren weniger an neuen Sätzen und Beweisen interessiert, als dass wir vielmehr die eigentliche mystische Natur der Zahlen und geometrischen Figuren hinterfragten. Unsere besondere Leistung lag in der Abstraktion der Probleme, die wir auf die reinen Beziehungen von Zahlen (also ohne jeglichen anschaulichen Ballast) reduzierten. Als ohne Frage bekanntester Satz der Mathematikgeschichte findet der ‚Satz des Pythagoras' (der zwar schon den Babyloniern bekannt war, aber erstmals von unserem Meister Pythagoras bewiesen wurde) in beinahe allen Bereichen der Naturwissenschaft seine Anwendung. Nachdem ihm die Götter für diesen Satz einen Beweis offenbart hatten, opferte er 100 Ochsen, eine ganz besondere Tat, wenn wir daran denken, dass wir an die Seelenwanderung glaubten und uns weigerten, Fleisch zu essen, um keine Tiere töten zu müssen. Aber für uns war dieser Beweis ein bedeutender Durchbruch. Jetzt wussten wir, dass dieser Satz für jedes rechtwinklige Dreieck gilt, und zwar überall und für alle Zeiten, ohne Ausnahme. So beeindruckt suchten wir fortan für all unsere Sätze stichhaltige Begründungen, oder eben Beweise, indem wir uns auf frühere bekannte Sätze abstützten.

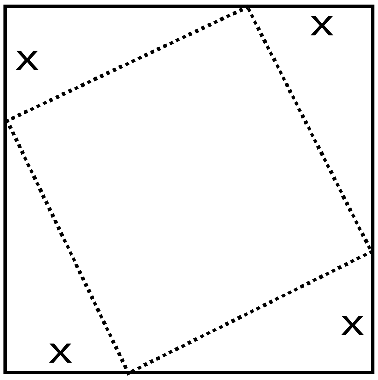
Im Verlaufe des weiteren Nachdenkens merkten wir aber, dass beim regelmässigen Fünfeck und beim Quadrat Strecken auftreten, die nicht in einfachem Verhältnis zueinander stehen. So ist das Verhältnis von Diagonalenlänge zu Seitenlänge im Quadrat nicht als Verhältnis ganzer Zahlen auszudrücken. Diese Erkenntnis erschütterte unsere Gemeinschaft zutiefst und spaltete sie.

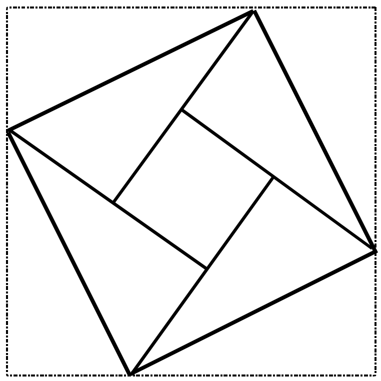


Ja, heute darf ich Ihnen all dies erzählen, damals wäre ich dafür aus der Gemeinschaft ausgeschlossen oder vielleicht sogar umgebracht worden.

Es hat mich sehr gefreut, Ihnen etwas aus jener intensiven Zeit zu berichten und wünsche Ihnen noch viel Freude mit Pythagoras und seinen Erkenntnissen.“ Ich verneige mich leicht und verlasse das Schulzimmer. Gute 15 Minuten hat dieser Auftritt gedauert.

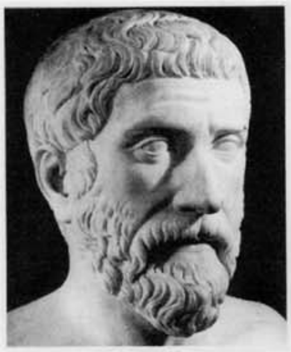
Ohne Insignien betrete ich kurze Zeit später wieder das Klassenzimmer. Die Schüler erläutern mir, ich hätte eben etwas verpasst, denn sie hätten einen Besuch erlebt, der ihnen von Pythagoras erzählt habe. Ich drücke mein Bedauern aus, dass ich ihn wegen einer wichtigen Sitzung verpasst habe und wäre ihm leider auch nicht auf dem Flur begegnet.





Nach diesem kleinen Zwischenspiel lege ich die farbigen Quadrate der ersten Lektionen aus und frage, ob wir jetzt in der Lage seien, diese zu vereinen. Wir tragen die wichtigsten Ideen zusammen und somit kann die Arbeit vorn auf dem Tisch beginnen. Die ersten Freiwilligen kommen und kleben in drei Gruppen die neun grossen Quadrate, die neun kleinen Quadrate oder die zwei gleich grossen kleinen Quadrate je zu einem einzigen Quadrat auf ein Stück Packpapier. Somit bleiben uns noch drei Quadrate zu vereinen. Den andern skizziere ich an der Tafel die Faltaufgabe eines Quadrates: „Trage von jeder Ecke des Quadrats im gleichen Umlaufsinn eine gewisse Strecke x ab, verbinde benachbarte Endpunkte und falte entlang der Linien.“

Eine der Gruppen bleibt vorne und vereinigt nach unserer ersten Figur die grösseren beiden Quadrate. Allerdings ergeben sich etliche Schwierigkeiten, bis das dann auch richtig aufgeklebt ist. Schliesslich kann ich noch ein paar andere Schüler motivieren, die letzten zwei Quadrate zu vereinen, auf Packpapier aufzukleben und auszuschneiden. Das Endprodukt fixiere ich mit den Magneten an die Tafel und wir können es betrachten. Gemeinsam gehen wir nochmals den ganzen Prozess durch. Ausgegangen sind wir von 20 Quadraten, nämlich 9 grossen und 11 kleinen. Neun grosse und neun kleine konnten wir je zu einem Quadrat vereinen, die zwei restlichen kleinen Quadrate wurden vereint, indem wir beide diagonal halbierten. So gelangten wir insgesamt zu drei verschieden grossen Quadraten. Dann fanden wir heraus, wie sich zwei verschieden grosse Quadrate vereinen lassen. Zweimaliges Anwenden dieses Vorgangs führte uns zu einem einzigen Quadrat. Und jetzt meine Schlussfrage: „Hätten wir es auch geschafft, wenn wir zu Beginn 20 verschieden grosse Quadrate gehabt hätten?“ – „Grundsätzlich ja, aber es hätte ‚ewig' gedauert.“ – Die Schüler sind jetzt überzeugt, dass wir auch 100, ja sogar 1000 Quadrate vereinen könnten. Es spielt keine Rolle, wie



Pythagoras

PYTHAGORAS VON SAMOS

(etwa 580 - 500 v. Chr.)

Über das Leben und Wirken von Pythagoras gibt es kaum gesicherte Fakten. Auf Grund der vorliegenden Pythagoras-biographien ist anzunehmen, dass Pythagoras in der Mitte des 6. Jahrhunderts v. Chr. auf der griechischen Insel Samos aufwuchs und anschliessend auf Reisen ging, vermutlich nach Phönizien, Ägypten und Babylonien, um dort Studien zu betreiben. Zurückgekehrt nach Samos wurde er Lehrer des Sohnes des Tyrannen Polykrates. Das Luxus- und Lotterleben am königlichen Hof vertrieb aber den Weltverbesserer und Moralisten Pythagoras und so zog er um 530 v. Chr. nach Kroton in Süditalien aus.

Dort gründete er eine philosophische und religiöse Schule, in der die Mathematik einen wesentlichen Bestandteil ihrer Heilslehre bildete. Er vertrat u. a. die Auffassung, dass die Wirklichkeit der Natur im Innersten mathematisch sei. Gott hat den Kosmos nach Zahlen geordnet; *„Alles ist Zahl"*, *„Das Wesen aller Dinge ist Zahl"* lautete das Credo, wobei unter Zahl das Verhältnis natürlicher Zahlen verstanden wurde.
„Alles, was man erkennen kann, lässt sich auf eine Zahl zurückführen." Zahlen haben eine mystische Qualität und damit auch therapeutische Kraft. Die Zahl Zehn, die *tetraktis*, stellte für die Pythagoräer eine göttliche Einheit dar. „Denn sie ist gross, alles vollendend, alles bewirkend und Anfang und Führerin des göttlichen, himmlischen und menschlichen Lebens." Gebildet wird sie als Summe von Eins, Zwei, Drei und Vier, den edelsten unter den Zahlen. Alle gemeinsam bilden das göttliche Dreieck. Vor allem die Entdeckung eines konstanten Verhältnisses zwischen der Länge der Saiten bei einer Leier und den Grundakkorden der Musik (1:2 für die Oktave, 2:3 für die Quint und 3:4 für die Quart) beeindruckten ihn so stark, dass er sich Gott als grossartigen Ingenieur vorstellte und glaubte, ein mathematisches Gesetz, nämlich die Harmonie, bestimme die ganze Natur. Ebenso drehen sich Erde, Mond, Sonne und die fünf damals bekannten Planeten auf ganzzahlig definierten kreisförmigen Himmelsbahnen und erzeugen dabei süsse Klänge, die sogenannte Sphärenharmonie.

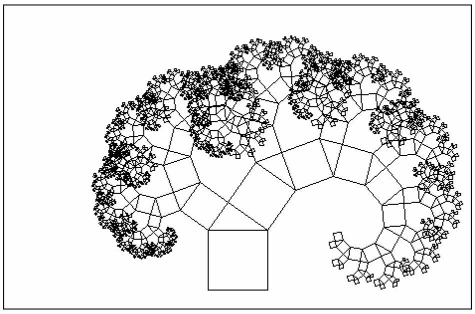
Die Pythagoräer lebten ganz einfach, waren Vegetarier und glaubten an die Seelenwanderung, eine Weltsicht, die Pythagoras sicher aus dem Fernen Osten, vielleicht sogar aus Indien, mitgebracht hatte. Der Körper ist nichts anderes als ein Gefängnis, in dem die Seele für ihre Schuld büsst. So erklärt sich die Pythagoräische Moral: „Immer schön brav, sonst geht's mit der Beförderung nicht weiter!" Neben strengen Regeln des täglichen Lebens verpflichtete er seine Schüler zusätzlich zu absoluter Verschwiegenheit, so dass uns kaum etwas über seine Erkenntnisse überliefert wurde. Die Eingeweihten lebten in Gütergemeinschaft. Bei Sonnenuntergang mussten sie sich stets drei Fragen stellen: *a) Was habe ich Schlechtes getan? b) Was habe ich Gutes getan? c) Was habe ich versäumt zu tun?*

Pythagoras und seine „mathematikoi" (Mathematiker) waren weniger an neuen Sätzen und Beweisen interessiert, als dass sie vielmehr die eigentliche mystische Natur der Zahlen und geometrischen Figuren hinterfragten. Ihre besondere Leistung lag in der Abstraktion der Probleme, die sie auf die reinen Beziehungen von Zahlen (also ohne jeglichen anschaulichen Ballast) reduzierten. Als ohne Frage bekanntester Satz der Mathematikgeschichte findet der "Satz des Pythagoras" (der zwar schon den Babyloniern bekannt war, aber wohl erstmals von Pythagoras bewiesen wurde) in beinahe allen Bereichen der Naturwissenschaft seine Anwendung. Nachdem er für den Satz einen Beweis gefunden hatte, soll er den Göttern 100 Ochsen geopfert haben, was allerdings verwundert bei einem Mann, der sich weigerte, Fleisch zu essen, um keine Tiere töten zu müssen.

Nach dem griechischen Philosophen Diogenes Laertios muss Pythagoras eine sehr bestimmende Persönlichkeit gewesen sein, denn er begann seine Reden stets mit dem Satz: *„Nein, bei der Luft, die ich atme, nein, bei dem Wasser, das ich trinke, ich gestatte keinen Widerspruch zu dem, was ich sage."*
Einmal gefragt: „Wer bist du?" soll Pythagoras geantwortet haben: *„Ich bin Philosoph"*. So kam dieser Begriff in die Welt, der wörtlich übersetzt 'Liebhaber der Weisheit' heisst.

Quellen: Peter Baptist: Pythagoras und kein Ende. Lesehefte Mathematik. Klett Verlag.
Luciano De Crescenzo: Geschichte der griechischen Philosophie. detebe 21912
Hans Wussing, Wolfgang Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk u. Wissen, Berlin

grosse und wie viele Quadrate am Anfang vorhanden sind; die Verallgemeinerung ist gelungen; Ich erinnere daran, dass ursprünglich bezweifelt wurde, ob unsere 20 Quadrate wirklich vereinigt werden könnten. Das nebenstehende Bild aus der fraktalen Geometrie macht den Abschluss der ersten Lektion: Es illustriert sehr schön das Vereinen und Entzweien, zwei in entgegen gesetzte Richtungen verlaufende Vorgänge, wie wir sie auch im Titelbild finden. In Ergänzung zu meinem Auftritt als Pythagoras verteile ich ein Blatt mit den wichtigsten Angaben über Pythagoras (Siehe S. 44).

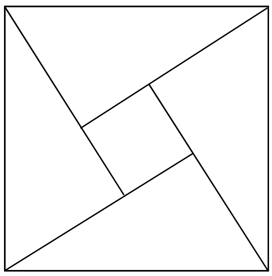


III. Akt: Beweisvielfalt

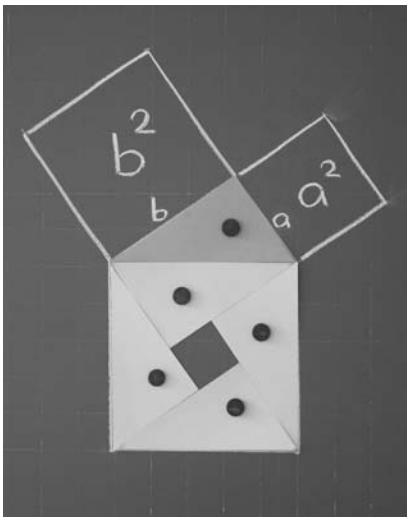
Für die zweite Lektion reinige ich die Tafel und notiere **III. Akt: Beweisvielfalt**
Wir haben zwar den Satz des Pythagoras bewiesen, und dies könnte uns genügen. Bekannt sind heute gegen 400 Beweise dieses bekanntesten mathematischen Satzes. Wir finden sie vereint in einem Buch von Elisha Scott Loomis mit dem Titel „The Pythagorean Proposition“. Darunter gibt es ganz unterschiedliche Beweise, an denen wir viel lernen können. Deshalb wollen wir noch ein paar weitere Beweise kennen lernen und uns dabei gleichzeitig im Argumentieren, logischen Denken und folgerichtigen Schliessen üben. „Was ist überhaupt ein Beweis?“ Wir suchen nach einer vorläufigen Definition. „Beweis: eine Behauptung überprüfen.“ – „Etwas klären, auf Bisherigem begründen.“

Diejenigen Schüler und Schülerinnen mit dem gleichen Beweisblatt bilden nun für die nächste Lektion eine Gruppe. Zwei der Schüler haben ihr Blatt nicht hier; wissen nicht einmal mehr, welchen Beweis sie studieren sollten. Da zudem zwei Schülerinnen krankheitshalber fehlen, kann ich so die Gruppen etwas ausgleichen. In jeder Gruppe soll der Beweis minutiös diskutiert und dann eine Präsentation für die Klasse vorbereitet werden. Ich kündige an, dass ich bei jeder Gruppe vorbeikommen möchte, um den Beweis vorzubesprechen. Nur so habe ich einigermassen Garantie, dass der Beweis verstanden ist und die Präsentation genügend Gehalt hat. Sehr unterschiedlich konzentriert gehen die Gruppen vor. Überall sollten Klärungen stattfinden, vielerorts fehlt es an logischem Denken. Meine Zeit reicht nicht, um allen Gruppen gerecht zu werden. Kongruenzsätze, Scherungsprinzip und algebraische Umformungen müssen zuerst ins Bewusstsein rücken. Immerhin, die leichtesten zwei Beweise scheinen gut vorbereitet und können in der 3. Lektion präsentiert werden.

Als erstes lasse ich den Beweis 2 zeigen, der auf der oben beschriebenen Faltfigur basiert. Der indische Mathematiker Bhaskara soll im 12. Jahrhundert diese Figur gezeichnet und nur darunter geschrieben haben: Siehe! So einfach geht das allerdings nicht. Vorerst muss die vorliegende Figur genau betrachtet sein. Vier kongruente rechtwinklige Dreiecke bilden ein Quadrat, da wir in jeder Ecke zwei spitze Winkel des Dreiecks finden, die sich zu 90° ergänzen. Im Zentrum der Figur liegt ein kleines Quadrat, dessen Seitenlänge der Differenz der beiden Katheten eines Dreiecks entspricht.



Siehe!



Wenn wir die Hypotenuse mit c und die beiden Katheten mit a und b bezeichnen, lässt sich die Quadratfläche auf zwei verschiedene Arten ausdrücken und es ergibt sich die folgende Gleichung: $c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2$

Es folgt daraus: $c^2 = 2ab + (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + b^2$

Was zu beweisen war.

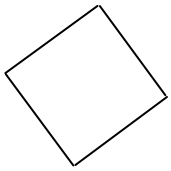
Der Beweis wird recht gut vorgetragen, da und dort muss ich etwas nachfragen. Die Zuhörenden können gut folgen und verstehen. Ich ergänze dieses Quadrat zur Pythagorasfigur. Die Katheten blitzen im Hypotenusenquadrat auf und der Beweis wird noch augenfälliger!

Der Beweis 6, ein Ergänzungsbeweis, wird weniger gut präsentiert. Obwohl in der Vorbesprechung alles klar schien, beschreitet Michael vorerst andere, völlig unklare Wege. Azra kann dann einigermassen verständlich erläutern, wie die beiden Kathetenquadrate in der Pythagorasfigur (vgl. S. 39) durch 4 kongruente rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a und b zu einem grossen Quadrat mit den Seiten (a+b) ergänzt werden. Marc fährt fort und zeigt, wie das Quadrat über der Hypotenuse c, ergänzt durch dieselben 4 Dreiecke (Fläche F_Δ), ebenfalls zu $(a+b)^2$ werden. So ergibt sich die Gleichung:

$$a^2 + b^2 + 4\cdot F_\Delta = (a+b)^2 = c^2 + 4\cdot F_\Delta \quad \rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Die Dreiecksfläche F_Δ muss nicht einmal speziell durch a und b ausgedrückt werden.

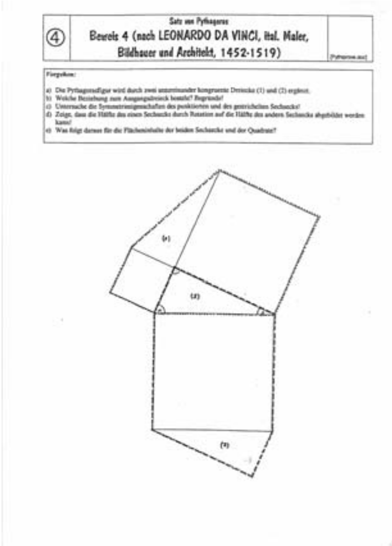
In Ergänzung zeige ich am Hellraumprojektor die griechische Briefmarke, die 1952 zum Gedenken an den 2500. Jahrestag der Gründung des Pythagoräischen Bundes herausgegeben wurde. Legt man ein durchsichtiges farbiges Quadrat darüber, so lässt sich sehr schön nochmals veranschaulichen, wie die vier Dreiecke einmal die oberen zwei und einmal das untere grosse Quadrat zu diesem farbigen Quadrat ergänzen.



Es bleiben noch zehn Minuten; Verdauung ist angesagt. Ich bitte die Schüler und Schülerinnen, das Faltquadrat einzukleben und sich einen der beiden Beweise ausführlich zu notieren. Die verbliebenen Gruppen mahne ich, ihren Beweis auf die nächste Lektion nochmals gut zu studieren und für die Präsentation bereit zu halten.

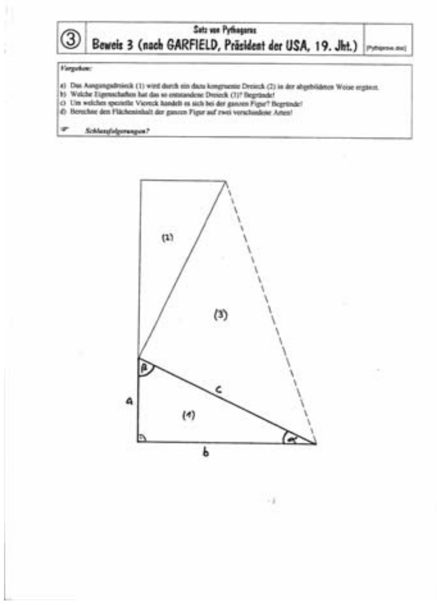
Lektionen 9/10

Heute nimmt die Beweisvielfalt ihre Fortsetzung. An der Tafel habe ich die ersten drei Beweise skizziert und rechts davon die drei Bereiche markiert für die Vorbereitungszeichnungen. Wie ich drei Minuten vor Stundenbeginn erscheine, macht niemand Anstalten, etwas an der Tafel zu zeichnen. Erst meine ausdrückliche Aufforderung bewegt die ersten zur Tat. Das Zeichnen geht schleppend vor sich, ich werde ärgerlich. Einige Minuten nach Stundenbeginn vergeht mir die Geduld, ich schicke die meisten an den Platz und lasse Beweis 4, den Beweis von Leonardo da Vinci vorstellen. Dies ist sicher kein einfacher Beweis zum Erklären. Es braucht einiges an Nachfrage meinerseits, da sonst vieles einfach übersprungen wird. Warum sind die Sechsecke symmetrisch? Warum geht die Hälfte des oberen Sechsecks bei Drehung



in die Hälfte des unteren Sechsecks über? Welches ist der Drehwinkel? Und welches ist jetzt die Folgerung? Besonders das schrittweise Begründen der Deckung durch Derhung bereitet grosse Mühe. Schliesslich nicken aber alle Schüler und Schülerinnen. Wir staunen über die geniale Beweisidee von Leonardo.

Beweis 3 wurde vom amerikanischen Präsidenten Garfield 1876 entdeckt. Er wird uns von Mehmet und Patrice, vorgestellt. Obwohl dieser algebraische Beweis nicht sonderlich schwer ist, bekunden sie grosse Mühe. Da habe ich offenbar zu wenig Betreuungsarbeit geleistet. Aber die beiden haben sich auch nicht gemeldet, wohl das Problem vor sich her geschoben. Nun, die Klasse macht recht gut mit, besonders Gabriel und Urs begründen, warum das dritte Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist. Mehmet will das immer noch nicht recht begreifen. Viele elementare Lücken im algebraischen und geometrischen Bereich werden bei ihm offenbar.



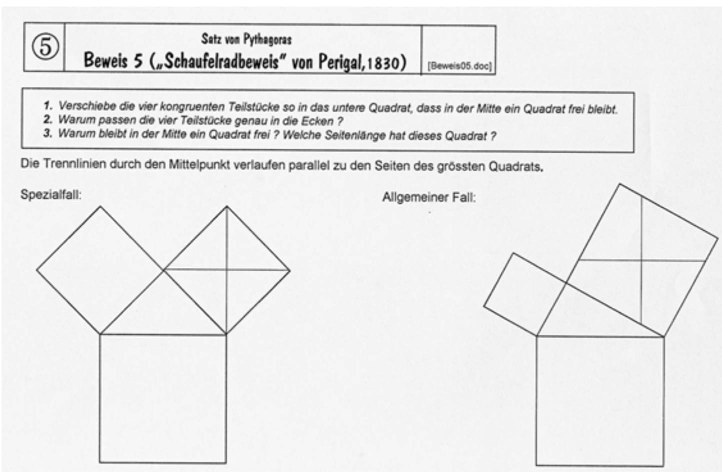
Die Trapezfläche lässt sich auf zwei verschiedene Arten ausdrücken: Einmal mit der bekannten Formel für die Trapezfläche und einmal als Summe der beiden kongruenten Dreiecksflächen und eines halben Quadrats.

Trapezfläche F_T = Mittellinie · Höhe =

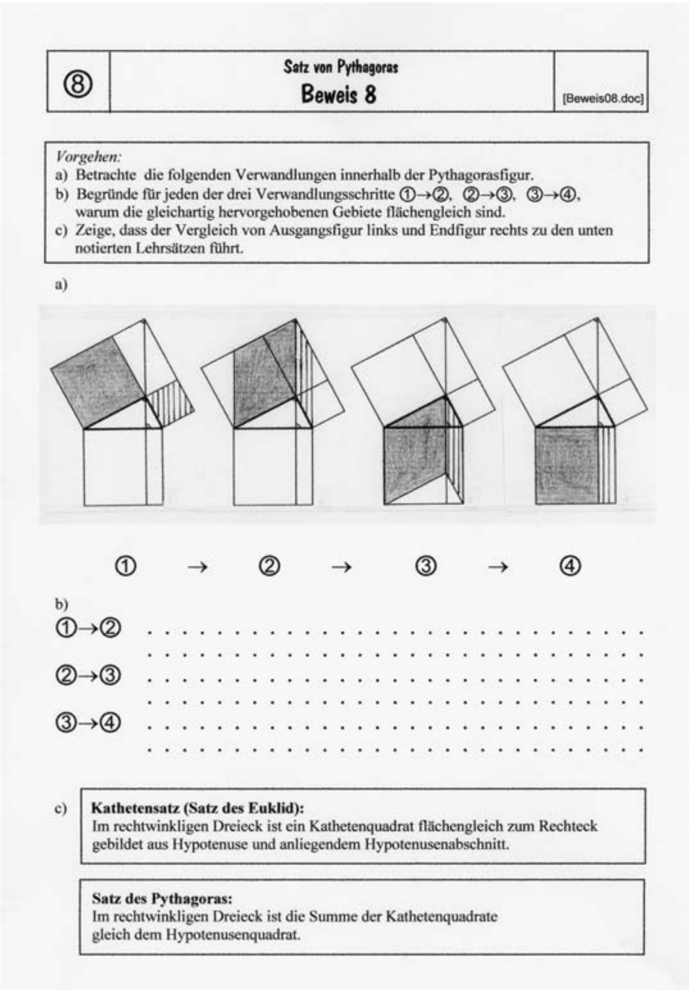
$$= \frac{a+b}{2}\cdot(a+b) = 2\cdot\frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$

Es dauert lange, bis Mehmet den Inhalt dieser Gleichung versteht und hinschreiben kann, was die andern erläutern.
Das Vereinfachen dieser Gleichung gelingt den meisten Schülern sofort.
Multiplikation mit 2 liefert $(a + b)^2 = 2ab + c^2$

$$\rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{w.z.z.w.}$$



Die zweite Lektion ist den Beweisen 5 und 8 gewidmet. Beweis 5 ist der Schaufelradbeweis aus dem Jahre 1830 von Perigal, der als Hobbymathematiker verschiedenste Zerlegungsprobleme auf kariertem Papier löste. Eindrücklich ist es, diesen Beweis als Verallgemeinerung der Zerlegung zu betrachten, die wir in den ersten Lektionen bereits zur Vereinigung von zwei gleich grossen Quadraten gefunden haben. Es ist anspruchsvoll zu zeigen, dass die vier kongruenten Vierecke wirklich unten hineinpassen. Die Gruppe um Urs bewältigt dies aber zufrieden stellend, auch wenn sie nicht allzu sehr in die Details geht. Womöglich werde ich diesen Beweis in Zukunft weglassen oder selbst demonstrieren, da er fast zu anspruchsvoll ist.



⑧ Satz von Pythagoras
Beweis 8 [Beweis08.doc]

Vorgehen:
a) Betrachte die folgenden Verwandlungen innerhalb der Pythagorasfigur.
b) Begründe für jeden der drei Verwandlungsschritte ①→②, ②→③, ③→④, warum die gleichartig hervorgehobenen Gebiete flächengleich sind.
c) Zeige, dass der Vergleich von Ausgangsfigur links und Endfigur rechts zu den unten notierten Lehrsätzen führt.

a)

① → ② → ③ → ④

b)
①→② . . . .
②→③ . . . .
③→④ . . . .

c) **Kathetensatz (Satz des Euklid):**
Im rechtwinkligen Dreieck ist ein Kathetenquadrat flächengleich zum Rechteck gebildet aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt.

Satz des Pythagoras:
Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Es bleibt Beweis 8, ein Verwandlungsbeweis, für den ich eine Folie und Schülerkopien bereitstelle. Gabriel und Monique erläutern recht gut. Die Verwandlung eines Rechtecks oder Quadrats in ein Parallelogramm mit gleicher Höhe will ich aber genauer diskutiert haben, da dies lange nicht für alle eine selbstverständliche Konstruktion ist. Auch hier gilt es wieder, eine Lücke zu stopfen. Der Beweis ist für mich als Mathematiklehrer deshalb zusätzlich sehr nützlich, weil gleichzeitig damit der Kathetensatz hergeleitet wird und weil er eine gute Grundlage schafft, um den Beweis zu verstehen, wie ihn Euklid in seinen Elementen geliefert hat.

Die Schülerinnen und Schüler haben genügend Zeit, diesen Beweis zu verdauen und sich noch einen andern Beweis zu notieren. Als besondere Herausforderung verteile ich den Beweis von Euklid, wie er ihn als Satz 47 am Ende des ersten Buches seiner Elemente (Euklid 1997, S. 32) geliefert hat. Zusätzlich geht die Aufforderung an alle, sich den Lieblingsbeweis auszusuchen und sich diesen sehr gut einzuprägen. Und zum Kathetensatz folgen zwei Konstruktionsaufgaben:

1. Verwandle ein Quadrat mit den Seiten 5 cm und 3 cm in ein Quadrat.
2. Verwandle das Quadrat mit Seitenlänge 6 cm in ein Rechteck mit Seite a = 2.5 cm.

Dieses Studieren von Beweisen hat doch einige Mühe bereitet. Insbesondere ist das genauere Hinterfragen und Begründen ungewohnt. Trotzdem gilt für viele, was Monique in ihrem Feedback ausdrückt: „Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich.“

Lektionen 11/12/13

Als erstes besprechen wir die beiden Konstruktionsaufgaben.
Die Beweisvielfalt habe ich an der Tafel aufgehängt. Es sind bislang 7 Beweise (die Nummer 7 habe ich ausgelassen, da dieser etwas anspruchsvoller ist als die andern). Ich gehe jeden einzelnen nochmals kurz durch und erläutere die Beweisidee. – Wir haben zwei Zerlegungs-

beweise (1, 6), zwei algebraische Beweise (2, 3), je einen Symmetriebeweis (4), einen Ergänzungsbeweis (6) und einen Verwandlungsbeweis (8).

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid

An die Leinwand projiziere ich den Beweis 9 von Euklid. Ich frage Simon, wie weit er die Beweisführung verstanden habe. Er meint: „Bis auf die Höhe der Zeichnung.“ Dies ist ja schon mal ganz beträchtlich. Er erläutert Zeile für Zeile; die andern fragen nach oder ergänzen. Beatrice und Azra haben den Beweis in der Bahn bei der Herfahrt studiert und sind bei Pgm BL stecken geblieben. Beatrice sieht klar, dass Pgm Parallelogramm meint, aber welches ist dieses Parallelogramm. Müsste es nicht „Rechteck“ heissen? Gabriel klärt, dass eben ein Rechteck auch ein Parallelogramm ist und dass hier auch wieder eine Flächenverwandlung vorliegt. Mehmet kann den Sachverhalt erläutern: „Wir verschieben A nach unten auf die Hypotenuse und erhalten ein halbes Rechteck.“ – „Worauf verweist Euklid wohl mit seiner Bemerkung (I, 4)?“ – „Es muss ein Kongruenzsatz sein?“ – „Welcher?“ – „Der Kongruenzsatz SWS.“ – Wir folgen der Beweisführung noch bis zum Schluss. Ich bin erstaunt wie weit doch einige diesen schwierigen Text studiert und verstanden haben. Die Details, Satz für Satz, sind einleuchtend. Nur der Blick aufs Ganze hat überall gefehlt. Jetzt aber wird klar, dass dieser Beweis sehr viel Verwandtschaft hat mit Beweis 8. Die Vorbereitung hat sich gelohnt! In Text des Euklid finden wir implizite den Kathetensatz, der wegen seinem Auftreten in diesem Abschnitt auch Satz des Euklid genannt wird. Die Pause ist wohlverdient.

⑨	Satz von Pythagoras **Beweis 9: Beweis bei Euklid** (ca.300v.Chr.)	[Beweis09.doc]

Euklid: Die Elemente. Buch I - XII. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt; 1980. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Diese 12 Bücher wurden um 325 v. Chr. in Alexandria systematisch zusammengestellt und waren die massgebenden Lehrbücher der Mathematik über mehr als zwei Jahrtausende hinweg.

Erstes Buch.

§ 47 (L. 33).

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

ABC sei ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel BAC. Ich behaupte, daß $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Man zeichne nämlich über BC das Quadrat $BDEC$ (I, 46) und über BA, AC die Quadrate GB, HC; ferner ziehe man durch A $AL \parallel BD$ oder CE und ziehe AD, FC.

Da hier die Winkel BAC, BAG beide Rechte sind, so bilden an der geraden Linie BA im Punkte A auf ihr die zwei nicht auf derselben Seite liegenden geraden Linien AC, AG Nebenwinkel, die zusammen $= 2$ R. sind; also setzt CA AG gerade fort (I, 14). Aus demselben Grunde setzt auch BA AH gerade fort. Ferner ist $\angle DBC = FBA$; denn beide sind Rechte (Post. 4); daher füge man ABC beiderseits hinzu; dann ist der ganze Winkel DBA dem ganzen FBC gleich (Ax. 2). Da ferner $DB = BC$ und $FB = BA$ (I, Def. 22), so sind zwei Seiten DB, BA zwei Seiten FB, BC (überkreuz) entsprechend gleich; und $\angle DBA = \angle FBC$; also ist Grdl. AD = Grdl. FC und $\triangle ABD = \triangle FBC$ (I, 4). Ferner ist Pgm. $BL = 2 \triangle ABD$; denn sie haben dieselbe Grundlinie BD und liegen zwischen denselben Parallelen BD, AL (I, 41); auch ist das Quadrat $GB = 2 \triangle FBC$; denn sie haben wieder dieselbe Grundlinie, nämlich FB, und liegen zwischen denselben Parallelen FB, GC. [Von Gleichem die Doppelten sind aber einander gleich (Ax. 5).] Also ist Pgm. $BL =$ Quadrat GB. Ähnlich läßt sich, wenn man AE, BK zieht, zeigen, daß auch Pgm. $CL =$ Quadrat HC; also ist das ganze Quadrat $BDEC$ den zwei Quadraten $GB + HC$ gleich (Ax. 2). Dabei ist das Quadrat $BDEC$ über BC gezeichnet und GB, HC über BA, AC. Also ist das Quadrat über der Seite BC den Quadraten über den Seiten BA, AC zusammen gleich — S.

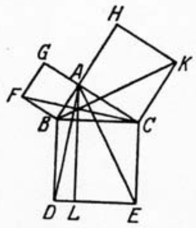


Fig. 46.

EUKLID UND DIE GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

Euklid von Alexandria, einer der einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten, lebte um 300 vor Christi Geburt. Über ihn selbst wissen wir praktisch nichts, nicht einmal seine genauen Lebensdaten. Er verfasste **Die Elemente**, ein dreizehnbändiges Kompendium des gesamten mathematischen Wissens jener Zeit, das in streng systematischem Aufbau die Geometrie sowie eine elementare Zahlenlehre darstellt.
„Die Elemente“ sind das dauerhafteste wissenschaftliche Lehrbuch aller Zeiten und gehören zu den Büchern mit den meisten Auflagen. In der „ZEIT-Bibliothek der 100 Sachbücher“ werden „Die Elemente“ von Euklid an vorderster Stelle gewürdigt. Noch bis vor gut hundert Jahren wurden Teile davon als Lehrbuch für die Mathematik verwendet.

Bücher I - VI:	Ebene Geometrie samt Satz des Pythagoras, Proportionen, Ähnlichkeitslehre
Bücher VII-IX:	Elementare Zahlenlehre mit Primzahlen, Primfaktorzerlegung Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des g.g.T.
Bücher XI-XII:	Körperberechnungen und Theorie der fünf regulären Körper.

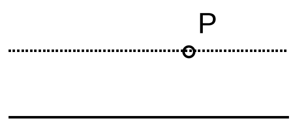
Zum ersten Mal wird die Geometrie axiomatisch-deduktiv aufgebaut. Aus der Wirklichkeit abstrahierte Grundbegriffe (**Definitionen**) und Grundrelationen (so genannte **Axiome** und **Postulate**) bilden das Fundament. Alle weiteren Aussagen werden mit Hilfe der Logik abgeleitet.
Beispiele für Grundbegriffe oder Definitionen: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat.“
„Eine Linie ist breitenlose Länge.“ „Die Enden einer Linie sind Punkte.“
„Eine gerade Linie ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmässig liegt.“ . . .
Beispiele für Postulate und Axiome: Gefordert soll sein:

> „Dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.“
> „Dass man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.“
> „Dass alle rechten Winkel einander gleich sind.“
> „Was einander deckt, ist einander gleich.“
> „Das Ganze ist grösser als der Teil.“

Das System der Axiome ist nicht willkürlich gewählt, sondern eine Abstraktion aus der jahrtausende alten täglichen Erfahrung des Menschen; sie ist deshalb die *Geometrie unseres Anschauungsraumes.*
Für die logische Herleitung von Lehrsätzen aus den Axiomen und aus früheren Lehrsätzen dient das **Euklidische Beweisverfahren**: Voraussetzung - Behauptung - Beweis. Dieses Grundmuster bestimmt die Mathematik bis in die heutige Zeit. Mit ihm wird aus wenigen Axiomen die gesamte „euklidische Geometrie“ logisch aufgebaut. Und jede so schlüssig hergeleitete mathematische Aussage hat Ewigkeitswert.

König Ptolemäus erkundigte sich bei Euklid nach einem leichteren Weg zur Mathematik als dem durch die Elemente. *„Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik“*, war Euklids Antwort.

Berühmt geworden ist das fünfte seiner Postulate, das so genannte **Parallelenaxiom**, welches behauptet, dass durch jeden Punkt ausserhalb einer gegebenen Geraden *eine und nur eine* Parallele zu der gegebenen Geraden gezogen werden kann.



Eine entscheidende Wende in der Geometrie brachte das Bestreben, eine Geometrie aufzubauen, in der das Parallelenaxiom nicht gilt. Nach 1800 erst wurden dann derartige *nichteuklidische* Geometrien entwickelt. Die moderne Physik hat gezeigt, dass man zu derartigen Geometrien übergehen muss, um die neuen physikalischen Erkenntnisse zu beschreiben (Relativitäts- und Gravitationstheorie, Kosmologie). Denn es hat sich gezeigt, dass die Geometrie unseres Universums eine nicht-euklidische ist.

Zu Beginn der zweiten Lektion verweise ich nochmals auf unsere acht verschiedenen Beweise und erkundige mich nach dem individuellen Lieblingsbeweis. Es zeigt sich das folgende Bild:

Beweis	①	②	③	④	⑤	⑥	⑧	⑨
Häufigkeit	1	4	2	4	2	2	6	0

Dass niemand Beweis 9 von Euklid wählen würde, war zu erwarten. Es überrascht mich aber, dass Beweis 1 nur von Gabriel gewählt wird und dass Mehmet und Patrice den Beweis 3 wählen, den sie so schlecht präsentiert haben. (Ob sie wohl bei den anderen Beweisen abgeschaltet haben?) Und warum wird Beweis 6 so wenig gewählt, obwohl er in meinen Augen einer der einfachsten ist? Ist die dürftige Präsentation schuld? Mehrere Schülerinnen und Schüler wählen denjenigen Beweis, den sie in der Kleingruppe studiert haben. Simon gefällt Beweis 4 besonders, denn: „Da muss man nichts rechnen." David sagt, Beweis 6 sehe gut aus und man könne leicht eine Gleichung aufstellen. Beweis 8 sei erstaunlich dynamisch, es sei gut sichtbar, was passiert. Ich erkläre, für mich seien die Beweise 6 und 8 die Favoriten. Beide gehen von der typischen, gut einprägsamen Pythagorasfigur aus. Beweis 6 sei leicht einzusehen und Beweis 8 beinhalte schöne Verwandlungen und als Nebenerkenntnis den Kathetensatz.

An der Tafel notiere ich den Titel zum 4. Kapitel:

IV. Akt: Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen" des Euklid

Um noch etwas klarer das Wesen eines Beweises zu erfassen, erläutere ich, ausgehend von diesem Beweis 9, dem Höhepunkt am Ende des ersten Buches von Euklids „Elementen", was ich auf einem Blatt „Euklid und die Grundlagen der Geometrie" (vgl. S. 50) zusammengefasst habe. Zur Darstellung des Euklidischen Beweisschemas (Voraussetzung – Behauptung – Beweis) wähle ich als Exempel den Beweis 6. Damit will ich der Klasse und insbesondere Mehmet und Pascal nochmals zeigen, was ich unter einem gut präsentierten Beweis verstehe.

Als Beispiel einer nichteuklidischen Geometrie erwähne ich die Kugelgeometrie. Denn wer ist schon sicher, dass z.B. seine zwei „Parallelen" auf dem Zeichenblatt in Wirklichkeit nicht Ausschnitte von zwei Grosskreisen auf der Erdkugeloberfläche sind?

Wir werfen einige kurze Querblicke in andere Wissensbereiche: In die Physik, welche die Welt möglichst mit einer einzigen Weltenformel vom Urknall bis heute erklären möchte, in die Philosophie, wo im 17. Jahrhundert Spinosa seine Ethik im Stil der Elemente Euklids schrieb, indem er seine strengen Theoreme aus Definitionen und Axiomen ableitete, und in die Rechtswissenschaft, wo versucht wird, überzeugende Beweise für Schuld oder Unschuld zu führen. Allerdings gibt es ausserhalb der Mathematik dieses hohe Mass an Gewissheit nicht, wie wir es innerhalb dieser Wissenschaft kennen. Damit sind wir bereits weit in der dritten Stunde angelangt.

Es reicht eben noch für den Einstieg in das nächste, praktischere Kapitel mit der Überschrift

V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Bevor wir uns verschiedensten Anwendungen widmen können, gilt es, die Satzgruppe des Pythagoras zu vervollständigen. Der Satz des Pythagoras und der Kathetensatz (= Satz des Euklid) stehen samt Bild nochmals an der Tafel. Der Höhensatz ergibt sich sofort aus den andern beiden Sätzen und vervollständigt diese Satzgruppe. An Beispielen zeigen wir, wie uns der Höhensatz – wie übrigens auch der Kathetensatz – erlaubt, Rechtecke konstruktiv in Quadrate zu verwandeln und umgekehrt. Das Blatt über Euklid und seine „Elemente" sowie ein paar erste Konstruktionsaufgaben sollen auf den nächsten Donnerstag bearbeitet werden.

Lektionen 13/14

Wir widmen uns ganz den verschiedensten Konstruktionsaufgaben. Unter anderem verwandeln wir ein Rechteck, ein Dreieck, ein regelmässiges Sechseck, beliebige Vier- und Fünfecke in ein Quadrat. Ein beliebiges Sechseck kann durch Scherung, wie wir sie in den Beweisen 8 und 9 gesehen haben, in ein Fünfeck, dieses in ein Viereck und dieses wiederum in ein Dreieck verwandelt werden. Das Dreieck lässt sich in ein Rechteck verwandeln, und dieses ist quadrierbar. Somit wird klar, dass ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat verwandelt werden kann. Hier verwenden wir den gleichen induktiven Denkschluss, wie wir ihn bei der Verallgemeinerung zum Vereinen der Quadrate zu Beginn des Lehrstücks kennen gelernt haben.

Lektionen 15/16/17

Wir bereinigen die Konstruktionsaufgaben. Bei einer ersten Berechnungsaufgabe stossen wir auf Quadratwurzeln. Da derartige Wurzeln bei den Berechnungen im Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras immer wieder auftauchen, lernen und üben wir den Umgang mit diesen Quadratwurzeln, was verschiedenen Schülerinnen und Schülern offenbar schwer fällt.

Lektionen 18/19

Diese beiden Lektionen sind noch ganz den Wurzelgesetzen und den Berechnungsaufgaben gewidmet, die Anwendungen der gewonnenen Sätze in den verschiedensten Alltagsbereichen umfassen.

Lektionen 20/21/22

Vorerst brauchen wir eine halbe Lektion, um noch ungeklärte Aufgaben zu bereinigen. Dann können wir in den letzten grossen Abschnitt einsteigen. Ich schreibe an die Tafel:

VI. Akt: Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras

Es folgt das grosse Finale mit Ergänzungen und Ausblicken.

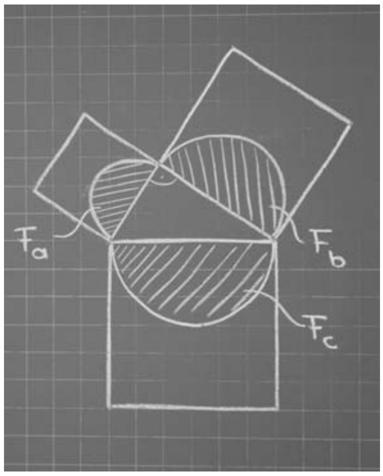
a) Klassische Verwandlungsaufgaben zum Quadrat

Wir stellen die bislang, z. T. in der Übungsserie gelösten Quadraturaufgaben zusammen:

Zwei gleiche Quadrate	$\rightarrow$	Quadrat
zwei verschiedene Quadrate	$\rightarrow$	Quadrat
Rechteck	$\rightarrow$	Quadrat (mit Höhensatz oder Kathetensatz)
Dreieck ($\rightarrow$ Rechteck)	$\rightarrow$	Quadrat
beliebiges Vieleck ($\rightarrow$ Rechteck)	$\rightarrow$	Quadrat
Kreis	$\rightarrow$	Quadrat ??? Ein unlösbares Problem!

Die Verwandlung eines Kreises in ein Quadrat hat sich als unlösbares Problem herausgestellt! Die Mathematiker können heute sogar beweisen, dass dieses Problem unlösbar ist, d.h. dass es grundsätzlich nicht möglich ist, die gesuchte Quadratseite mit Zirkel und Lineal zu konstruieren! Wir sprechen auch übertragen von der „Quadratur des Kreises / Zirkels". Diese Sprechweise ist den Jugendlichen bisher unbekannt. Es folgt ein kurzer Hinweis auf die drei klassischen antiken mathematischen Probleme, die sich als unlösbar herausgestellt haben: Die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung des Winkels.

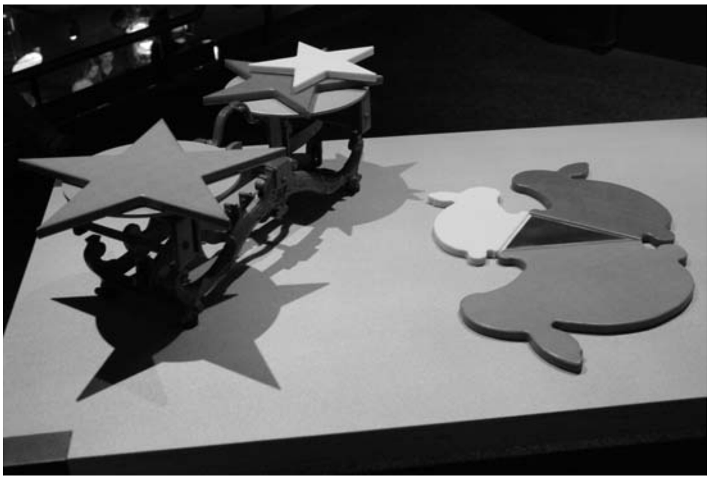
Bei den Möndchen des Hippokrates erleben wir ein sensationelles Ergebnis. An diesem Beispiel wurde erstmals in der Geschichte der Mathematik eine rund begrenzte Fläche beschrieben, die nachgewiesenermassen gleiche Fläche hat wie ein Vieleck, hier wie ein Dreieck und damit quadrierbar ist. Zeichnen wir über jeder Seite des rechtwinkligen Dreiecks den Halbkreis, so ergibt sich für die Halbkreisflächen dasselbe wie für die entsprechenden Quadratflächen:

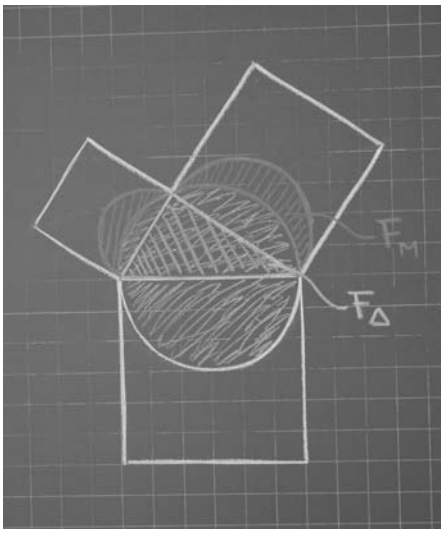


$$F_a + F_b = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\cdot\left(a^2+b^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot c^2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2 = F_c$$

Jede Halbkreisfläche beansprucht nämlich den gleichen Anteil (π/8 oder 39.27%) der zugehörigen Quadratfläche. Hier liegt eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras verborgen: Wir können beliebige formgleiche (ähnliche) Figuren über den Seiten errichten und es besteht immer noch dieselbe Flächenbeziehung. Sehr zum Be-Greifen wird dies durch ein Experiment in der neu eröffneten Ausstellung Mathe-Magie des Technoramas Winterthur dargestellt (Bild nebenan!). Später, im Kapitel „Ähnlichkeit“, werde ich mit der Klasse darauf zurückkommen, wenn wir den Satz des Pythagoras erneut beweisen werden.



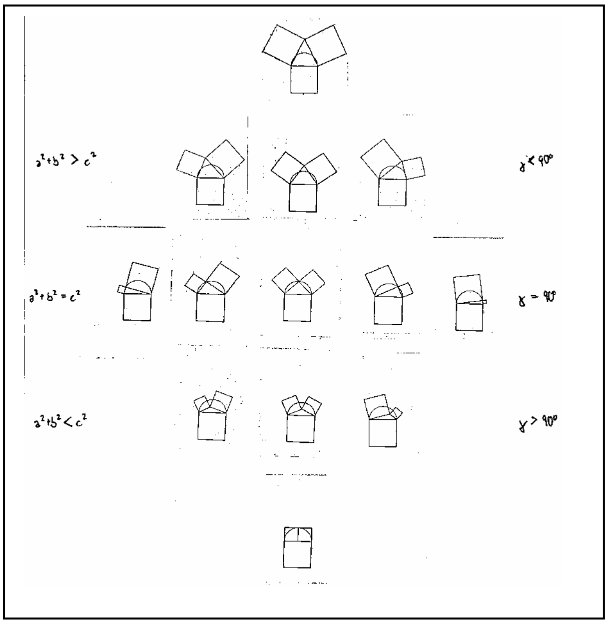


Klappen wir jetzt den grössten Halbkreis nach oben, so entstehen die beiden Möndchen und es ergibt sich $F_M = F_a + F_b - (F_c - F_\Delta) = F_\Delta$, das heisst die gesamte Möndchenfläche F_M ist gleich der Fläche F_Δ des rechtwinkligen Dreiecks!!! Wir können zwar keinen Kreis mit Zirkel und Lineal in ein Quadrat verwandeln, aber diese zwei Möndchen zusammen sind flächengleich dem zentralen Dreieck in der Pythagorasfigur und können damit auch in ein Quadrat verwandelt werden! Hippokrates von Chios hat dies bereits im 5. Jahrhundert vor Christus erkannt und bewiesen. Zudem kann man diese Figur und diesen Zusammenhang als schön empfinden. Aber darüber lässt sich bekanntlich streiten.

b) Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

Eine andere Verallgemeinerung leite ich ein mit einer Übung: Mit der Tischkante und meinen Armen bilde ich ein aufgestelltes gleichseitiges Dreieck. Die Schülerinnen und Schüler bitte ich, ruhig zu beobachten und sich die Quadrate über den Dreiecksseiten vorzustellen. Jetzt variiere ich das Dreieck: Einmal steigt die dritte Ecke ganz hoch, dann wandert sie nach unten bis fast zur Tischkante, nochmals hoch und wieder runter, dann dasselbe langsam einmal mehr rechts, einmal mehr links. „Was lässt sich sagen über die Summe der Flächen der beiden oberen Quadrate in Bezug auf die untere Quadratfläche, die ich am Tisch befestigt habe?“ Es ist offensichtlich, dass diese Flächensumme einmal grösser und ein andermal kleiner sein muss als die untere fixe Quadratfläche. Und dazwischen ist sie einmal genau gleich gross, nämlich dann und nur dann, wenn wir ein rechtwinkliges Dreieck vorfinden, d.h. wenn die obere Ecke auf dem Thaleskreis über der Basis liegt.

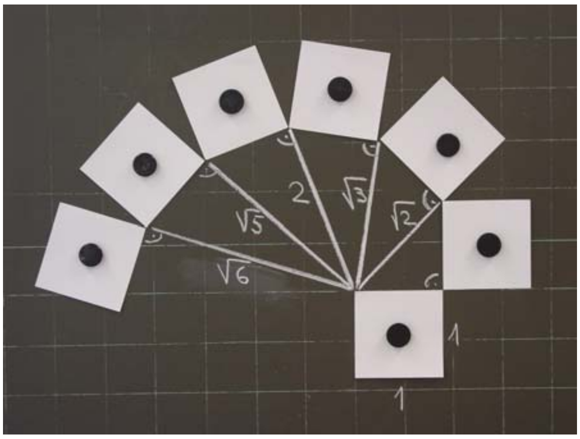
Für diese Verallgemeinerung des Satzes auf Dreiecke mit beliebigen Winkeln verteile ich neun kleine Bildchen mit verschiedenen Dreiecken und den Quadraten über den Seiten. Die Schüler sollen die Darstellungen am Platz sortieren und möglichst sinnvoll anordnen! Das geht recht gut. Zwei verschiedene Anordnungen entstehen: linear und zweidimensional im Kreuz. Ich lasse beide Anordnungen an der Tafel präsentieren. Die zweite setzt sich in der Diskussion klar durch. Ich verteile noch weitere vier Figuren, worauf diese problemlos eingefügt werden. Lassen wir die obere Ecke auf einer Vertikalen zirkulieren, so wird diese Verallgemeinerung zum Satz des Pythagoras einsichtig. Weiter seitlich gelegene Eckpunkte lasse ich im Moment der Übersicht halber weg.



Hefteintrag von Roman

c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke

Ich hänge den Anfang der sogenannten Wurzelschnecke an die Tafel und wir ergänzen und beschriften. Es lassen sich mit dieser Methode des fortgesetzten Anhängens eines Einheitsquadrats der Reihe nach alle Wurzeln der natürlichen Zahlen bilden. Eine Schülerin hat bereits einmal so etwas gezeichnet und sagt, das sehe aus wie eine Schnecke oder eine Muschel. Ich: „Es ist eine Schnecke, die Wurzeln erzeugt, darum wird sie Wurzelschnecke genannt.“ –



Dritte Lektion

Auf der Rückseite der Tafel habe ich links ein Blatt mit den ursprünglichen zwanzig Quadraten hingeheftet, in der Mitte das Quadrat, das die Einzelquadrate vereint und ganz rechts sind die Ausgangsquadrate in Spiralform wie bei der Wurzelschnecke angeordnet. Nach einigem Hinsehen wird die letzte Linie der Spiralform als Quadratlänge erkannt. Wir halten das grosse Quadrat hin: Es passt!

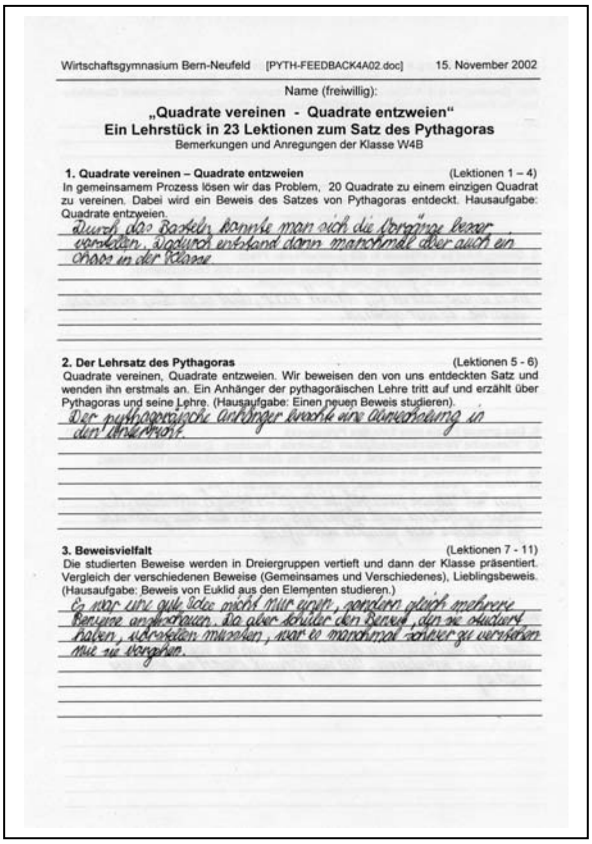
Abschluss

Ich ergänze das Bild durch das Pythagorasblatt, zwei Beweisblätter, das Euklidblatt und die Aufgabenblätter. So spannt dieses schöne Schlussbild den Bogen zum Anfang. Wir durchschreiten gedanklich nochmals den Weg: Vom Vereinen und Entzweien der Quadrate über

das Entstehen der Pythagorasfigur und den Beweis zu Pythagoras selbst, dann zu Beweisvielfalt und Beweisprinzip, Aufbau der Geometrie bei Euklid und die vielfältigen Anwendungen und Aspekte des berühmten Satzes.

1.5 Feedback der Schüler zum Lehrstück

Ein Feedbackbogen gibt den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit, individuell den Prozess durchzugehen und das Wichtigste aufzuschreiben. Ein Drittel der Klasse hat sich allerdings nur anonym geäussert, wie z.B. unten BBB (6) der Feedbacktabelle:



Wirtschaftsgymnasium Bern-Neufeld [PYTH-FEEDBACK4A02.doc] 15. November 2002

Name (freiwillig):

„Quadrate vereinen - Quadrate entzweien"
Ein Lehrstück in 23 Lektionen zum Satz des Pythagoras
Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4B

1. Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Lektionen 1 – 4)
In gemeinsamem Prozess lösen wir das Problem, 20 Quadrate zu einem einzigen Quadrat zu vereinen. Dabei wird ein Beweis des Satzes von Pythagoras entdeckt. Hausaufgabe: Quadrate entzweien.

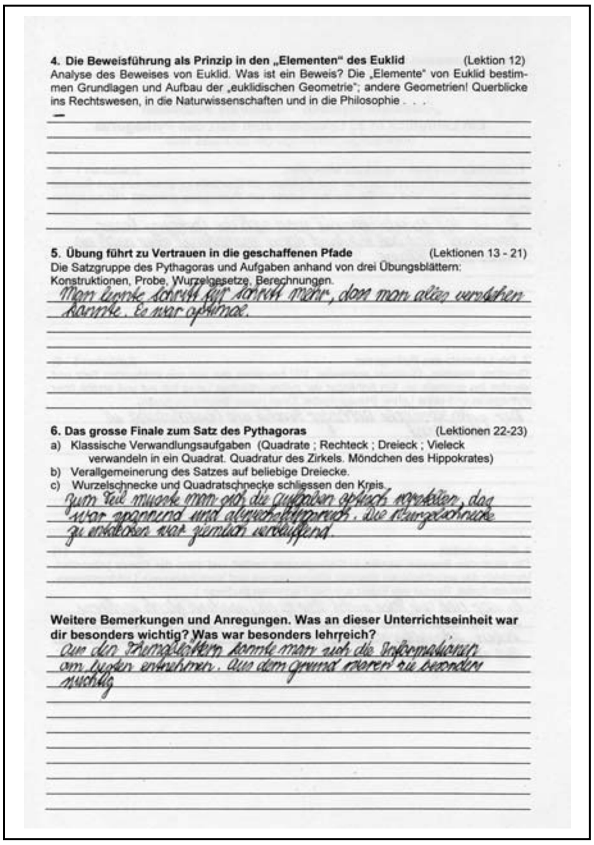
Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen. Dadurch entstand dann manchmal aber auch ein Chaos in der Klasse.

2. Der Lehrsatz des Pythagoras (Lektionen 5 - 6)
Quadrate vereinen, Quadrate entzweien. Wir beweisen den von uns entdeckten Satz und wenden ihn erstmals an. Ein Anhänger der pythagoräischen Lehre tritt auf und erzählt über Pythagoras und seine Lehre. (Hausaufgabe: Einen neuen Beweis studieren).

Der pythagoräische Anhänger brachte eine Abwechslung in den Unterricht.

3. Beweisvielfalt (Lektionen 7 - 11)
Die studierten Beweise werden in Dreiergruppen vertieft und dann der Klasse präsentiert. Vergleich der verschiedenen Beweise (Gemeinsames und Verschiedenes), Lieblingsbeweis. (Hausaufgabe: Beweis von Euklid aus den Elementen studieren.)

Es war eine gute Idee nicht nur einen, sondern gleich mehrere Beweise anzuschauen. Da aber Schüler den Beweis, den sie studiert haben, vorstellen mussten, war es manchmal schwer zu verstehen wie sie vorgehen.



4. Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen" des Euklid (Lektion 12)
Analyse des Beweises von Euklid. Was ist ein Beweis? Die „Elemente" von Euklid bestimmen Grundlagen und Aufbau der „euklidischen Geometrie"; andere Geometrien! Querblicke ins Rechtswesen, in die Naturwissenschaften und in die Philosophie . . .

–

5. Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade (Lektionen 13 - 21)
Die Satzgruppe des Pythagoras und Aufgaben anhand von drei Übungsblättern: Konstruktionen, Probe, Wurzelgesetze, Berechnungen.

Man lernte Schritt für Schritt mehr, dass man alles verstehen konnte. Es war optimal.

6. Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras (Lektionen 22-23)
a) Klassische Verwandlungsaufgaben (Quadrate ; Rechteck ; Dreieck ; Vieleck verwandeln in ein Quadrat. Quadratur des Zirkels. Möndchen des Hippokrates)
b) Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke.
c) Wurzelschnecke und Quadratschnecke schliessen den Kreis.

Zum Teil musste man sich die Aufgaben einfach vorstellen, das war spannend und abwechslungsreich. Die Wurzelschnecke zu entdecken war ziemlich verblüffend.

Weitere Bemerkungen und Anregungen. Was an dieser Unterrichtseinheit war dir besonders wichtig? Was war besonders lehrreich?

Aus den Themenblättern konnte man sich die Informationen am besten entnehmen. Aus dem Grund waren sie besonders wichtig.

Die Tabelle ist so aufgebaut, dass zu jedem Akt die Möglichkeit, bzw. die Aufforderung besteht, Bemerkungen und Anregungen einzubringen. Diese Akteinteilung und die Veranschaulichung des Prozesses an der Tafel sollen der Erinnerung helfen. So ergibt sich zu jedem der Akte ein beträchtliches Meinungsspektrum. Am Schluss besteht die Möglichkeit für generelles Feedback oder sonstige Meinungen, die bisher nicht untergebracht werden konnten. Finden werden wir dort sicher auch Wiederholungen, als Verstärkungen gedacht, und Ansichten, die nicht direkt zum Lehrstück gehören.

„Quadrate vereinen - Quadrate entzweien“

Ein Lehrstück in 23 Lektionen zum Satz des Pythagoras

Bemerkungen und Anregungen der Klasse W4B vom 5. Dezember 2002

	I. Akt: Quadrate vereinen – Quadrate entzweien (Lektionen 1/2/3/4)	**II. Akt: Der Lehrsatz des Pythagoras** (Lektionen 5/6)	**III. Akt: Beweisvielfalt** (Lektionen 7/8/9/10/11)	**IV. Akt: Beweisführung als Prinzip bei Euklid** (Lektion 12)	**V. Akt: Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade** (Lektionen 13 - 20)	**VI. Akt: FINALE a) Verwandlungen b) Verallgemeinerung c) Quadratschnecke** (Lektionen 21/22)	**Weitere Bemerkungen und Anregungen** (Lektion 23)
Monique (1)	Diese Lehrphase war sehr lang. Zwar war die Idee gut, aber ich dachte mir nach 2 Stunden, als wir immer noch nicht fertig waren, in der dritten wird's sicher klappen!	Ich fand es eine sehr gute und abwechslungsreiche Idee, „Besuch vom pythagoräischen Anhänger“ zu bekommen. Es war so viel spannender zuzuhören. Zu Hause den Beweis zu studieren hat mir Spass gemacht, denn ich konnte eine Lösung finden.	Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich.	Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten.	Das freie Arbeiten macht grossen Spass. So kommt man gut voran und kann, wenn es Probleme gibt, zuerst den Kollegen fragen. Und wenn der auch Schwierigkeiten hat, kann sicher Hans helfen …!!	Es war anfangs sehr spannend, aber mit der Zeit wurde das Zuhören zu lange. Übrigens, dieses Blatt finde ich eine sehr gute Idee!! *(Meint wohl dieses Feedbackblatt?)*	Zum Beispiel bei den Wurzeln, finde ich, es geht zum Teil sehr schnell voran. Du und einige Mitschüler sind sich ihrer Sache sehr sicher. Ich habe zu Hause lange gebraucht, um aus meinen Notizen schlau zu werden. Wenn wir in der Schule sind und ich mich in eine Aufgabe versetzt habe, beginnt meistens schon die nächste!! Aber: Diese Lernphase war sehr gut!!
AAA (2)	Das Lösen des Problems, die 20 Quadrate zu einem zu vereinen, fand ich ein bisschen zu lang. Die 3 Lektionen, an denen wir daran gearbeitet haben, waren zu viel. Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt.	Der Auftritt des Anhängers war sehr interessant, denn so bekamen wir Informationen aus erster Hand. Diese Methode finde ich besser, als z.B. einfach ein Blatt zu erhalten, auf dem etwas über die Lehre Pythagoras' steht.	Die Beweisvielfalt war sehr gut, denn es war interessant zu sehen, wie unterschiedlich die Leute den Satz bewiesen haben.		Ich finde, in der Probe hätte es mehr Polynomdivisionen geben sollen. Die Wurzelaufgaben im Buch waren z. T. recht schwierig. Die Übungen auf dem Blatt waren sehr interessant und gut.	Ich finde es gut, dass wir noch so einen Überblick bekamen über das, was wir bisher getan haben. Es war interessant zu sehen, wie alles irgendwie zusammenhängt.	Dass wir zum Teil die Aufgaben und Beweise selber herausfinden mussten mit Ausprobieren und so, war sehr gut, denn so kann man es sich besser einprägen. Manchmal war es ein wenig in die Länge gezogen und so konnte man sich am Ende der 3. Lektionen nur noch schlecht konzentrieren.
Manuela (3)	Am Anfang glaubte ich nicht, dass dies möglich sei, aber ich bin überzeugt worden, dass es geht. Es ist zwar eine komplizierte Art, aber dennoch wir haben es geschafft.		Beweis 8 verstand ich am besten. Doch dieser lässt sich besser konstruieren als berechnen. Das ist ein Nachteil, dass man nicht gut berechnen kann.		Konstruieren finde ich leichter als berechnen.	(zu b) Ich fand das sehr logisch. Ich verstand es auch gut.	Ich finde es gut, dass wir einen Beweis des Pythagoras wissen müssen.
Azra (4)	Ich fand es gut, dass wir es alle zusammen gemacht und studiert hatten, und wie wir dann am Schluss das Resultat hatten.	Ich fand es gut, dass wir auch etwas über Pythagoras selber erfuhren, und nicht einfach nur den Satz studierten und dann mit ihm arbeiteten. Es war interessant, etwas über die Geschichte zu erfahren.	Das mit dem „Beweise Präsentieren“ fand ich ziemlich gut, obwohl einige Beweise am Anfang schwer verständlich waren. Aber man hat ja seinen eigenen Satz, den man verstand. Mein Lieblingsbeweis ist Nummer 8, weil er für mich am verständlichsten war.	Die Analyse des Beweises von Euklid fand ich ziemlich interessant und dass wir auch ein bisschen von Euklid und „euklidischer Geometrie“ erfuhren.	Es war gut, dass wir selbständig arbeiten konnten und die Übungsblätter waren auch gut und anspruchsvoll. Ich fand es auch gut, dass wir die Aufgaben zusammen besprochen hatten. Allerdings ging das mit dem Höhen- und Kathetensatz ein bisschen zu schnell.	Das Finale fand ich ziemlich gut, so zum Abschluss, obwohl es ein bisschen schnell ging. Die Möndchen des Hippokrates verstand ich, aber der Sinn der Wurzelschnecke ist mir nicht so klar, es ging ein bisschen schnell.	Ich fand dieses Thema ziemlich interessant, allerdings ging es mir manchmal zu schnell. Wir hätten vielleicht mehr Zeit zum Üben haben sollen, aber sonst fand ich es gut.
Patrice (5)	Es war interessant, da man einfach etwas experimentieren musste, um auf die richtige Lösung zu kommen. Ich finde, dass man das Ganze nur in 2 oder 3 Lektionen durchführen könnte.	Der Anhänger der Pythagoras war lustig, aber es war lehrreich, was er erzählte.	Ich fand es sehr gut, dass wir uns auf einen Beweis konzentrieren konnten, so dass wir ihn wirklich verstehen. Die Präsentation war trotzdem recht schwierig.		Gut, dass wir noch praktisch geübt haben.	(zu a) Fand ich spannend, vor allem versteh ich das gut.	Ich finde es gut, dass du dir so viel Mühe gibst, uns diese Unterrichtseinheit so interessant wie möglich zu gestalten, wie z.B. mit dem Anhänger. – Die ersten 13 Lektionen hätte man vielleicht etwas kürzen können. Die Probe war schwer vorzubereiten, denn man konnte eigentlich nur Punkt 5 üben.
BBB (6)	Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen. Dadurch entstand dann manchmal aber auch ein Chaos in der Klasse.	Der pythagoräische Anhänger brachte eine Abwechslung in den Unterricht.	Es war eine gute Idee, nicht nur einen, sondern gleich mehrere Beweise anzuschauen. Da aber Schüler den Beweis, den sie studiert haben, vorstellen mussten, war es manchmal schwer zu verstehen, wie sie vorgehen.		Man lernte Schritt für Schritt mehr, dass man alles verstehen konnte. Es war optimal.	Zum Teil musste man sich die Aufgaben optisch vorstellen, das war spannend und abwechslungsreich. Die Wurzelschnecke zu entdecken war ziemlich verblüffend.	Aus den Themablättern konnte man sich die Informationen am besten entnehmen. Aus dem Grund waren sie besonders wichtig.

CCC (7)	Ich denke, wir haben zuviel Zeit für dies aufgewendet. Was ich gut fand, war dass wir es mit der ganzen Klasse besprochen haben.	Den Einstieg in die Beweise des Pythagoras fand ich nicht schlecht.	Da wir alleine einen Beweis studieren mussten, denke ich, dass es etwas gebracht hat. Man hat in der Gruppe das Problem lösen müssen und so es vortragen → Ist Abwechslung, anstatt dass der Lehrer alles selber erklären muss.	Mit der Philosophie kann ich eigentlich wenig anfangen, obschon es auch zur Mathematik gehört.	Durch die Übung bekam man etwas Routine und konnte es dann auch in der Probe anwenden.	Ich finde gut, dass wir wieder auf das Quadrat zurückgekommen sind. Das schliesst die Verknüpfung mit dem zuvor gelernten Teil.	
Gabriel (8)	Ich fand sehr gut, dass wir die Probleme nicht gerade serviert bekamen, sondern wir selber das Problem lösen konnten. Aus diesem Grund ist es mir gut geblieben. Es ist mir aber auch deshalb sehr geblieben, weil wir das Ganze immer vor uns hatten und praktisch vorgingen und nicht alles auf theoretischer Stufe.	Ich fand die Idee mit dem Anhänger des Pythagoras sehr gut. Sie kam sehr überraschend und holte meine Aufmerksamkeit voll und ganz.	Ich fand interessant, dass man auch einmal den Klassenkameraden etwas beibringen konnte.	Den Beweis 9 von Euklid fand ich sehr interessant, denn wenn man alles genau durchliest, dann erscheint es einem gar nicht mehr so schwer. In diesem Teil mit den Axiomen etc. ging es mir aber ein bisschen zu schnell und dadurch habe ich den Zusammenhang mit der „euklidischen“ Geometrie nicht ganz verstanden.	Ich fand die Blätter jeweils sehr anspruchsvoll auf den ersten Blick. Ich musste mich ziemlich in das Thema vertiefen, dass ich am Ende nachkam. Die Blätter selber fand ich sehr gut, denn wenn man die Aufgaben darauf lösen kann, wusste man, dass man das Thema beherrscht.	Ich fand es sehr interessant, dass am Schluss die Wurzelschnecke, der Linie des Quadrates übereinstimmte. Wieso habe ich aber nicht ganz verstanden.	Im Ganzen betrachtet fand ich es sehr abwechslungsreich. Am lehrreichsten für mich war, dass wir auch praktisch arbeiten konnten.
Thierry (9)	Gute Darstellung des Beweises. Ziemlich verständlich gestaltet. Klarer Lösungsweg. Aber für den späteren Satz des Pythagoras hat es mir nicht viel geholfen.	Die kleine Interpretation war lustig und lehrreich gestaltet.	Es ist eine gute Idee, dass die Schüler den Beweis präsentieren. Indem man ihn vor der ganzen Klasse erklärt, vertiefen wir uns noch mal in den Beweis. Der Beweis von Euklid wie er auf dem Blatt dargestellt wurde, war nicht ersichtlich. Er erzählt viel zu viel unnötiges Zeug, was den Text noch komplizierter machte.		Es ist immer wieder gut, Übungsblätter auszuteilen. Wir konnten den Lehrstoff nochmals für uns oder mit anderen repetieren und uns eine gewisse Sicherheit für die Probe schaffen. Es wäre gut, wenn sie noch mehr Übungsblätter verteilen würden.	a) Eigentlich ersichtlich, aber das mit den Möndchen war nicht ganz klar. b) Es ist gut, dass wir es bildnerisch darstellen konnten. Das Motiv das sich am Schluss ergab, war für mich sehr hilfreich. c) Logisch und ersichtlich dargestellt.	
Michael E. (10)	Dieser Teil war als Einleitung sehr gut. Man konnte sich die Möglichkeiten des Satzes so sehr gut einprägen. Besonders, weil wir lange im Dunkeln tappen und so alle studieren und nach Lösungen suchen mussten. Es hätte aber ein bisschen kürzer sein können. Sonst wirklich super.	Der Teil, als der Freund von Pythagoras kam, hat mir sehr gut gefallen. An den Beweis und Anwendung erinnere ich mich nicht.	Der Teil mit der Dreiergruppe war gut, meinen eigenen Beweis (der meiner Gruppe) konnte ich mir nämlich auch am besten einprägen.		Auch hier fehlte ich am Anfang. Sonst war es gut. Ich hätte einfach noch gerne ein Theorieblatt über die Wurzelgesetze erhalten.	Gut und einleuchtend.	Solche kleine Showeinlagen tun der Stimmung gut. Auch, dass wir oft in Gruppen oder im Plenum und selten selbständig arbeiteten, gefiel mir. Der Unterricht gefällt mir im Allgemeinen sehr gut, das Lerntempo meistens auch.
Adrian (11)	Ich fand es gut, dass wir am Anfang selber probieren mussten, die Quadrate zu vereinen. Es war ziemlich schwierig, da wir vorher dieses Thema noch nie behandelt hatten. Die Quadrate zu entzweien, war dann nicht mehr so schwer.	Die kleine Aufführung war eine gute Idee, besser als wenn wir alles auf Papier gehabt hätten. Es war ziemlich leicht, diesen Beweis zu studieren und aufzuschreiben.	Das mit den Dreiergruppen war gut, man konnte Meinungen und Lösungen austauschen. Es war aber manchmal schwer, den Erklärungen der anderen Gruppen zu folgen.	Der Beweis des Euklid war anfangs schwer zu begreifen, aber durch die Analyse wurde er dann verständlich.	Teilweise (Wurzelgesetze) ging es etwas zu schnell, mehr Beispiele hätten evtl. geholfen.	a) War nicht schwer zu begreifen und leuchtete mir sofort ein. b) Das mit den 9 / 13 Figürchen in die Gesetzmässigkeit bringen, war spannend. c) Für mich noch etwas unverständlich, ich werde mir die Quadratschnecke nochmals ansehen.	
Simon (12)	Es war gut, das Problem selbst zu lösen. Aber wir brauchten dafür etwas lang, vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen.	Es war gut mal ein Bisschen Abwechslung. Es war nicht einfach nur Erzählen.	War gut, jetzt konnte man sicher gehen, dass dieser Satz immer stimmt. Auch die Arbeit in verschiedenen Gruppen war gut.		Jetzt können wir den Satz gut anwenden, war gut, auch mal selbständig zu arbeiten.	a) Alles jetzt in der Übersicht (gut). b) Interessant, wann die Quadrate wie gross sind. c) Es sieht schön aus.	Selber Probleme lösen, auch mal selbständig arbeiten. Die Beweise von Pythagoras waren sehr lehrreich.
Jasmin (13)	Ich fand es ein bisschen zu lange, als wir den ganzen Donnerstagmorgen versucht haben, 9 grosse und 11 kleine Quadrate zu einem grossen Quadrat zusammen zu fügen. Aber schlussendlich leuchtete es mir ein.		Es war gut, dass wir Dreiergruppen machten und es so die Stunde etwas auflockerte.	Dieses Blatt mit dem Beweis von Euklid fand ich ziemlich schwer verständlich und sehr kompliziert. Ich denke, dass es eigentlich gar nicht so schwierig wäre, aber es ist einfach so schwierig formuliert.	Das Konstruktionen-Blatt konnte ich gut lösen und auch die Probe ist mir dieses Mal nicht schlecht gelungen. Aber dann das mit diesen Wurzelberechnungen u. s. w. habe ich nicht wirklich begriffen.	a) Das finde ich sehr logisch und es war gut erklärt (in meinem Tempo; nicht zu schnell). b) Ganz klar ist es mir noch nicht, aber ich denke, wenn ich „das“ noch genauer studiere, kann ich „das“ dann (hoffentlich…). c) Ging mir zu schnell.	Bei mir ist es oft der Fall, dass ich noch bei der vorherigen Aufgabe bin (am Überlegen und/oder der Aufgabe abschreiben), während „wir“ schon bei der nächsten sind. Also mir ist das Tempo, mit dem wir arbeiten, allgemein zu schnell.
DDD (14)	Der Einstieg war gut, doch 3 Lektionen überlegen, wie man zum Ziel käme, fand ich ein bisschen mühsam.	Abwechslung durch Verkleidung gut, auch dass mit musikalischen Mitteln etwas gemacht worden ist.	Eigener Beweis ist einem in Erinnerung geblieben, andere Beweise fanden bei mir kaum Interesse.	Beweisen wie Euklid benötigt enormes Grundwissen. Wie man einen Beweis aufschreiben kann, verstehe ich heute besser, jedoch komplexe Angelegenheiten könnte ich noch nicht in Angriff nehmen.	Anwendungen gut begriffen, selten Probleme.	Guter Bogen vom Schluss zum Anfang. Beweislage nicht ganz einleuchtend, warum man einen Kreis nicht in ein Quadrat verwandeln kann, sonst alles gut begriffen.	

Roman (15)	Ich finde, wir sind zu lange einfach im Kreis gesessen und haben keinen Erfolg gehabt. Nach 3 Lektionen wussten wir erst, wie wir zwei Quadrate vereinen können.	Der Anhänger kann gar kein Echter sein, er wäre schon lange gestorben.	Es war gut, verschiedene Beweise zu sehen. Sie waren leicht verständlich.		Ein Teil war Repetition von der Sekundarstufe, ein kleiner Teil war neu. Gut, dass es repetiert wurde, da ich einiges nicht mehr konnte oder vergessen habe.	a) Es war eigentlich nur noch eine kleine Ergänzung. b) Wir haben herausgefunden, dass es nur mit rechtwinkligen Dreiecken geht. c) Erstaunlich, dass es immer funktioniert.	Etwas anderes: Ich finde 3 Lektionen Math sind nicht zu viel, aber in der 3. Lektion ist die Konzentration nicht mehr gut. Auch bei mir. + Wir haben nicht so viel Aufgaben. + Die bisherigen Themen sind nicht so schwer, dass man zu Hause noch lange nachdenken muss.
David (16)	Die Lösung war interessant, nur war der Lösungsweg in meinen Augen zu lang. D.h. wir hätten die Lösung früher präsentiert gekriegt haben sollen, denn von uns entdeckte sie niemand und das Interesse liess nach.	War interessant und abwechslungsreich. Man lernt besser, wenn der Stoff nicht nur als trockene Theorie vermittelt wird. Ich fand dies gut, um einen (geschichtlichen) Hintergrund über die ganze Geometrie der alten Griechen zu erhalten.	Die Beweise waren verwirrend und meist auch unverständlich präsentiert. Ich brauchte eine Woche später nur noch ca. 10 Minuten, um 2 Beweise zu verstehen und auswendig zu lernen, In der Schule gelang mir dies indes nicht.		Zu den Wurzelgesetzen: Die Hausaufgaben auf dem 2. Übungsblatt waren relativ schwierig und zeitintensiv.	Nützlicher Überblick, ich fand dass dies ein brauchbarer Abschluss ist.	Ich finde es von Vorteil, wenn wir nach jeder Lektionseinheit (2h am Mo oder 3h am Do) Aufgaben zum Lösen bzw. Theorie zum Vertiefen und Verstehen besitzen. Dies müssen keine Hausaufgaben sein. Nur z.B. nach den ersten Stunden zum Thema Quadrate vereinen: Ich hatte es nicht vollkommen verstanden und wäre um etwas theoretisches Material durchaus froh gewesen.
Fabian (17)		Schön gezeigt worden mit dem Instrument des Anhängers von Pythagoras.	Durch die Beweisvielfalt wirklich die Möglichkeit sich einen Beweis einzuprägen. Positiv war die Gruppenarbeit. Im Gespräch mit anderen merkt man sich eher etwas, als beim bloßen Zuhören.	Es hat mich erstaunt, wie sehr z.T. Mathematik und Philosophie zusammenhängen.		Gut war das Möndchen des Hippokrates (verblüffend). Etwas weniger gut war die Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke, da mir noch nicht bewusst ist, was das eigentlich soll.	Besonders lehrreich war die Gruppenarbeit zur Beweisvielfalt. Sehr gut waren auch die Übungsblätter, dank den übertragbaren Aufgaben.
EEE (18)	Ich fand den Einstieg in die Geometrie gut.	Ich möchte mich bei diesem Anhänger der pythagoräischen Lehre bedanken, denn nun kenne ich den Hintergrund des Satzes des Pythagoras.	Die Beweisvielfalt ist überwältigend. Der Beweis 3 (Garfield) war sehr gut und ist eine der wenigen guten Leistungen der Amerikanischen Präsidenten.	Die Beweisführung war sehr komplex und schwer verständlich, aber an sich gut.	Es ist schön, wenn man auch Aufgaben lösen kann und nicht immer mitdenken muss. Wieso kommt nun wieder Algebra?	Endlich kann man einfach eine Wurzel berechnen, wie aber kann man dies mit Zahlen machen?	Die Übungsblätter waren sehr nützlich und lehrreich. Vielleicht könnte auch ein Anhänger des Euklid kommen während Herr Brüngger da ist.
FFF (19)	Ich fand das gemeinsame Rätseln /Ausprobieren gut, ich fand die dafür verwendete Zeit ein wenig zu lang.		Die verschiedenen Beweise waren interessant und zeigten die Vielfalt der Geometrie. Den „Euklid" fand ich eher überflüssig, weil, entweder habe ich nicht aufgepasst, oder ich habe sonst nicht viel Wesentliches mitbekommen.	Das war eine gute Abwechslung, man sah wie weit der Mensch damals schon denken konnte.	Fand ich sinnvoll und hatte eigentlich auch keine Probleme damit, obwohl die Probe dann nicht so berauschend herauskam.	Interessante, wenn vielleicht auch nutzlose Tatsachen, die einen guten Abschluss machten. (nutzlos nicht unbedingt, da wir ja später Trigonometrie (oder so) haben, aber zu diesem Zeitpunkt kann ich es nicht wirklich brauchen.)	Für mich war das Kennenlernen der verschiedenen Sätze/Beweise etc. wichtig und natürlich das darauf folgende Üben des Stoffes. Am lehrreichsten fand ich die Lektionen mit den Beweispräsentationen. Ich finde, du solltest ein wenig schneller/ direkter zur Sache kommen (z.B. nicht etwas an die Tafel malen und fragen, was das ist und niemand aus der Klasse antwortet, und du wartest einfach … Sag, was es sein soll!)
Beatrice (20)	Ich fand gut, dass wir zuerst ausprobieren durften, denn dadurch erfuhren wir, dass es für uns keinen anderen Lösungsweg gab. Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!	Dass ein Anhänger auftrat und dies uns so erklärte, fand ich sehr gut und lustig!!! Den Beweis dann erklären können oder sogar selbst lösen, fand ich schwer. Alleine wäre ich sicher nie auf die algebraische Gleichung von Beweis 6 gekommen. (Ich meine bei den Hausaufgaben)	Die Beweise waren für mich oft nicht auf den ersten Blick verständlich! Ich hätte gut gefunden, wenn wir die Beweise (jeden) auf einem Blatt hätten und dazu eine Aufgabe mit Anwendung des Beweises. Die Hausaufgabe war spannend, weil man erfuhr, wie der Euklid geschrieben wurde und es war machbar (wenn man konzentriert ist) den Worten zu folgen!	Die Beweiserklärung fand ich weniger spannend, aber doch notwendig und hilfreich.	Kathetensatz und Höhensatz waren für mich nicht sofort verständlich, aber bald. Von den Wurzelgesetzen habe ich fast nichts im Unterricht verstanden (zu schnell), nachdem ich es aber lange studiert habe, geht es!	a) Spannend, hilfreich und anwendbar! Gute Erklärungen! b) Gute Erklärungen, einleuchtend. c) Finde ich sehr gut, sehr einleuchtend!	Die Quadratschnecke war sehr einleuchtend! Besonders hilfreich fand ich den Stoff von den Scherungen (Fünfeck → Quadrat). Sehr hilfreich! Sehr gut fand ich, dass wir selber drauf kommen müssen und ausprobieren können.
GGG (21)	+ Ich fand diese Form von Arbeiten sehr gut. Man sah an dem Bild wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher, ihn wieder anzuwenden. - Ich denke, dass wir mit dieser Methode aber zu viel Zeit verloren haben.	Wir lernen den Satz des Pythagoras näher kennen und hinterfragen, sehr viele, für mich bisher noch unbekannte Beweise und Behauptungen.	+ Sehr grosse Auswahl, welchen Beweis man als Lieblingsbeweis nehmen wollte. – Ich hätte es besser gefunden, wenn wir uns auf einen Beweis konzentriert hätten, damit wäre auch keine Verwirrung entstanden.	Diese Beweisführung fand ich ein bisschen zu wenig ausführlich erklärt (oder ich habe nicht genug gut aufgepasst). Deshalb wusste ich in der Probe auch nicht, was die „euklidische Geometrie" ist.	Ich denke, den Satz des Pythagoras kann ich jetzt in- und auswendig.	a) + War sehr gut und ausführlich erklärt. Deshalb ein bisschen schwer zu verstehen. b) Es war nur anhand von Bildern und keine Formeln. c) War bildnerisch dargestellt, daher nimmt man viel mehr auf als wenn man es nur hört.	Ich finde die 3fach Stunde manchmal sehr anstrengend. + Mit der Darstellung von Bildern oder wenn man etwas jemandem erklärt oder bastelt, nimmt man viel mehr vom Lernstoff auf.

I. Akt: Quadrate vereinen – Quadrate entzweien

Dieser Einstieg wird mehrheitlich (13-mal) als gut bezeichnet. Vor allem das selbsttätige Suchen und Herausfinden, das Ausprobieren und das gemeinsame Experimentieren werden hervorgehoben, weil es zu besserem Verständnis und nachhaltigem Einprägen beiträgt. So meint AAA (2): „Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt." oder BBB (6): „Durch das Basteln konnte man sich die Vorgänge besser vorstellen." Für Beatrice (20) war das Ausprobieren ein Erkenntnisweg: „Ich fand gut, dass wir zuerst ausprobieren durften, denn dadurch erfuhren wir, dass es für uns keinen anderen Lösungsweg gab. Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!" Gabriel (8): „Ich fand sehr gut, dass wir die Probleme nicht gerade serviert bekamen, sondern wir selber das Problem lösen konnten. Aus diesem Grund ist es mir gut geblieben, weil wir das Ganze immer vor uns hatten und praktisch vorgingen und nicht alles auf theoretischer Stufe." Für Patrice (5) war es interessant, „da man einfach etwas experimentieren musste, um auf die richtige Lösung zu kommen". Dagegen findet David (16) die Lösung zwar interessant, er hat aber den Eindruck, „wir hätten die Lösung früher präsentiert gekriegt haben sollen, denn von uns entdeckte sie niemand und das Interesse liess nach." Nach seiner Wahrnehmung wurde die Lösung von mir präsentiert. Azra (4) und CCC (7) finden es gut, „dass wir es alle zusammen gemacht und studiert hatten."

Mehr als die Hälfte der Schülerinnen und Schüler merken an, diese erste Phase mit der Dreifachlektion sei zu lang gewesen. Knapp hören wir von CCC (7): „Ich denke, wir haben zuviel Zeit für dies aufgewendet." Differenzierter lesen wir bei Simon (12): „Es war gut, das Problem selbst zu lösen. Aber wir brauchten dafür etwas lang, vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen." Für Jasmin (13) war die Phase am Donnerstagmorgen „ein bisschen zu lang", aber sie sieht darin Positives: „Aber schlussendlich leuchtete es mir ein." Bei GGG (21) tönt es schon fast widersprüchlich: „Ich fand diese Form von Arbeiten sehr gut. Man sah an dem Bild, wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher, ihn wieder anzuwenden. – Ich denke, dass wir mit dieser Methode aber zu viel Zeit verloren haben." Wer gut hinschaut, kann tatsächlich im Bild den durchlaufenen Prozess und den Beweis ablesen. Aber kann eine sehr gute Form von Arbeiten Zeitverschwendung sein? Manuela (3) hat erfahren, dass sich das Durchhalten lohnt: „Am Anfang glaubte ich nicht, dass dies möglich sei, aber ich bin überzeugt worden, dass es trotzdem geht. Es ist zwar eine etwas komplizierte Art, aber dennoch wir haben es geschafft." Hier hören wir die Freude, ja den Stolz heraus, dass wir es gemeinsam schlussendlich doch geschafft haben.

Fragen drängen sich auf: Lohnt sich der zeitliche Aufwand? Kann oder darf man den Prozess durch mehr Hilfe abkürzen? Werden Konzentration und Ausdauer der Schülerinnen und Schüler zu sehr strapaziert? In diesen drei Stunden wurde doch viel ausprobiert, nachgedacht, zugehört und argumentiert. Bezüglich der Hilfe höre ich im Hintergrund Ruth Cohn (1981), die Begründerin der Themen zentrierten Interaktion (TZI): „Zuwenig geben ist Diebstahl, zuviel geben ist Mord." Ohne beharrlich dranzubleiben, könnten die Schülerinnen und Schüler das stolze Erlebnis des Durchbruchs und der selbst gewonnen Einsicht nicht erringen. Aber es braucht künftig eine bessere Vorinformation der Schülerinnen und Schüler, über den Wert des Suchens, Ausprobierens – in der Wissenschaft, im Alltag – und dass wir im Gymnasium ab und zu dieses vertiefende Entdecken, Erforschen erleben wollen. Die vielen positiven Schülerreaktionen bestätigen ja auch den Ansatz. *Trotzdem werde ich nächstes Mal mit einer Doppelstunde beginnen und sehen, wie sich dies auf den Prozess und auf das Befinden auswirkt. Vielleicht werden beharrlichere Schülerinnen in die folgende Stunde einen Lösungsvorschlag für die Vereinigung von zwei verschieden grossen Quadraten mitbringen.*

II. Akt: Pythagoras und „sein“ Satz

Im II. Akt erleben wir die Durchführung des Beweises und den Auftritt des Anhängers des Pythagoras. Der Beweis wird in der Erinnerung überschattet vom Auftritt, der durchwegs als Abwechslung (6,12,16) und Bereicherung, von einigen Schülern auch als lehrreich (2,4,5,9,16,18) erlebt wurde. So meint AAA (2): „…, denn so bekamen wir Informationen aus erster Hand.“ oder EEE (18): „Ich möchte mich bei diesem Anhänger der pythagoräischen Lehre bedanken, denn nun kenne ich den Hintergrund des Satzes des Pythagoras.“

Knapp dosiert und in 15 Minuten auf das Wesentliche beschränkt, hinterlässt der Auftritt grossen Eindruck. Er sollte allerdings mehr sein als nur „mal ein Bisschen Abwechslung“ (Simon 12). Wer sich interessierte, konnte im Nachgang mein Informationsblatt lesen. Wie die Nachfrage bei einer anderen Klasse fast zwei Jahre später zeigt, ist zwar der Auftritt noch lebhaft in Erinnerung, inhaltlich aber fast nichts mehr abrufbar. *Künftig will ich die auftretenden Personen womöglich immer wieder verknüpfen über das Bild von Raffael: „Schule von Athen“, das hinten in meinem Zimmer hängt! Zum ersten Beweis müsste konkret ein Feedback erbeten werden! Sonst geht er in der Erinnerung unter zwischen Einstiegsprozess einerseits und Auftritt sowie Beweisvielfalt anderseits.*

III. Akt: Beweisvielfalt

Der III. Akt steht ganz im Zeichen der Beweisvielfalt. Die Schülerinnen und Schüler haben die Herausforderung angenommen, intensiver einen weiteren Beweis zu studieren, um ihn dann präsentieren zu können. Die Erinnerung ist noch so lebhaft, dass sich alle zu diesem Akt geäussert haben. Die Beweisvielfalt war für EEE (18) „überwältigend“, sie zeigte nach FFF (19) „die Vielfalt der Geometrie“, bot Fabian (17) die echte „Möglichkeit, sich einen (Lieblings-) Beweis einzuprägen.“ AAA (2) fand Interesse daran, „wie unterschiedlich die Leute den Satz bewiesen haben.“ GGG (21) hätte sich allerdings lieber auf *einen* Beweis konzentriert, „damit wäre auch keine Verwirrung entstanden.“ Beatrice (20) hätte sich alle Beweise präsentiert auf einem Blatt gewünscht. Gerade dies möchte ich aber nicht. Es ist nicht nötig, dass jede Schülerin jeden Beweis bis in alle Detail versteht, aber einen sehr gut und bei den andern mindestens die Hauptideen. Wer wollte, fand genügend Zeit, sich die Präsentationen zu notieren und anschliessend bei der entsprechenden Gruppe nachzufragen.

Die angeordnete Arbeit in Dreiergruppen wurde geschätzt. Michael E. (10) begründet: „…, meinen eigenen Beweis (den meiner Gruppe) konnte ich mir nämlich auch am besten einprägen.“ und Adrian (11): „…man konnte Meinungen und Lösungen austauschen.“ Oder Fabian (17): „Im Gespräch mit anderen merkt man sich eher etwas, als beim blossen Zuhören.“ Jasmin (13) erlebte die Dreiergruppen allerdings primär als Auflockerung. Die intensive Beschäftigung mit einem Beweis in der Kleingruppe führt zu einer Vertiefung und Konzentration auf einen Beweis, birgt anderseits die Gefahr, dass man sich den andern Beweisen verschliesst wie DDD (14): „Eigener Beweis ist einem in Erinnerung geblieben, andere Beweise fanden bei mir kaum Interesse.“

Eng zur Arbeit in den Kleingruppen gehört die Präsentation des Beweises. Gabriel (8): „Ich fand interessant, dass man auch einmal den Klassenkameraden etwas beibringen konnte.“ David (16), der ein langsamer Denker ist und sich während der Stunden schlecht konzentrieren kann, erlebte das so: „Die Beweise waren verwirrend und meist auch unverständlich präsentiert.“ Später zuhause hat er sie allerdings rasch verstanden. Zusammenfassend meint Monique (1): „Diese Lektionen fand ich von den besten des ganzen Themas. Denn zu forschen, Lösungen finden und den anderen präsentieren, macht Spass. Die Ideen der andern zu hören ist auch sehr interessant und lehrreich.“ Kleingruppenarbeit und Präsentation verlangen viel Eigenaktivität und Eigenverantwortung, sie erlauben vertiefte Auseinandersetzung mit einem Beweis. Erst diese Vielfalt gestattet eine individuelle Auswahl.

IV. Akt: Beweisführung als Prinzip bei Euklid

Dieser Akt ist ganz Euklid, seinen „Elementen“ und grundsätzlichen Fragen gewidmet. Zum anspruchsvollen Beweis von Euklid gibt es sehr unterschiedliche Reaktionen. Thierry (9) meint: „Er erzählt viel zu viel unnötiges Zeug, was den Text noch komplizierter machte.“ Bei FFF (19): „Den ‚Euklid’ fand ich eher überflüssig, weil, entweder habe ich nicht aufgepasst, oder ich habe sonst nicht viel Wesentliches mitbekommen.“ Im Gegensatz dazu haben sich Beatrice (20) und Monique (1) bei der gemeinsamen Bahnfahrt zur Schule, mit dem Satz intensiv auseinandergesetzt und ein Erfolgserlebnis gefeiert. Beatrice schreibt: „Die Hausaufgabe war spannend, weil man erfuhr, wie der Euklid geschrieben wurde, und es war machbar (wenn man konzentriert ist) den Worten zu folgen!“ Jasmine (13) hatte weniger Geduld: „Dieses Blatt mit dem Beweis von Euklid fand ich ziemlich schwer verständlich und sehr kompliziert. Ich denke, dass es eigentlich gar nicht so schwierig wäre, aber es ist einfach so schwierig formuliert.“ Natürlich ist der Beweis aus den „Elementen“ in vielem ungewohnt, aber nach der Vorbereitung durch Beweis 8 und mit entsprechender Konzentration ist er verständlich. Wenn ich an Beatrice (29) und Monique (1) denke, übrigens beide mässige Mathematikerinnen, so kann die Auseinandersetzung mit diesem Beweis die stolze Erfahrung vermitteln, einen 2300 Jahre alten mathematischen Text aus der Blütezeit der griechischen Wissenschaft gelesen und verstanden zu haben.

Auf die wissenschaftstheoretischen Aspekte folgen praktisch keine Reaktionen. Fabian (17): „Es hat mich erstaunt, wie sehr z. T. Mathematik und Philosophie zusammenhängen.“ Auch FFF (19) ist beeindruckt: „…man sah wie weit der Mensch damals schon denken konnte.“ Azra (4) fand es immerhin interessant, „… dass wir auch ein bisschen von Euklid und euklidischer Geometrie erfuhren. Am ausführlichsten erwähnt Monique (1) diesen Teil: „Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten.“

Der Beweis des Euklid steht an der Schwelle vom III. zum IV. Akt. Deshalb wurde auf ihn teils im III. Akt und teils im IV. Akt geantwortet. Dies weist auf eine Kompositionsschwäche hin! Dieser Beweis wird nicht in den Dreiergruppen bearbeitet und sicher auch von niemandem zum Lieblingsbeweis auserkoren. *Deshalb muss nach Beweis 8 bereits die Wahl des Lieblingsbeweises erfolgen und die Diskussion über sie den III. Akt beenden. Der Beweis des Euklid, zuhause vorbereitet, eröffnet dann den IV. Akt.* Mit den historischen und wissenschaftstheoretischen Aspekten konnte ich anscheinend nur wenige Schülerinnen und Schüler erreichen. Aber sehr aufmerksam waren Monique (1) und Fabian (17), die auf diese Blicke in die Tiefe und in die Weite besonders gut ansprachen.

V. Akt: Üben führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade

Im V. Akt wird mit geometrischen und algebraischen Aufgaben geübt. Das sehr freie Üben wird geschätzt, bringt Vertrautheit und Sicherheit im Umgang mit den Sätzen. GGG (21): „Ich denke, den Satz des Pythagoras kann ich jetzt in- und auswendig.“ Nur mit den Wurzelgesetzen können sich einige Schüler nicht anfreunden, obwohl wir sie eingehend behandelten und ein Theorieblatt verteilt wurde. *Dem Umgang mit Wurzeln werde ich das nächste Mal noch mehr Aufmerksamkeit schenken.*

VI. Akt: Finale a) Verwandlungen b) Verallgemeinerung c) Quadratschnecke

Im dreiteiligen Finale geht es um Zusammenfassung und Verallgemeinerung. Was der einen logisch und offensichtlich ist, ist dem andern zu schnell. *Insbesondere Wurzelschnecke und Quadratschnecke werde ich ein andermal etwas eingehender studieren lassen, zu Gunsten von Schülerinnen wie Azra (4), Gabriel (8), Adrian (11) und Jasmin (13).* Die Quadratschnecke ist wohl ein wenig meinem Wunsch bzw. meiner Notwendigkeit zum Opfer gefallen, unbedingt noch den Fragebogen ausfüllen zu lassen. Der Abschluss im Sinne eines Überblicks und eines Bogens zum Anfang wird in ein paar Voten gewürdigt, so z. B. von AAA (2): „Ich finde es gut, dass wir noch so einen Überblick bekamen über das, was wir bisher getan haben. Es war interessant zu sehen, wie alles irgendwie zusammenhängt." David (16) schreibt: „Nützlicher Überblick, ich fand, dass dies ein brauchbarer Abschluss ist." und DDD (14): „Guter Bogen vom Schluss zum Anfang."

Weitere Bemerkungen und Anregungen

Generell gesehen wird diese Inszenierung des Lehrstücks sehr positiv beurteilt. Vor allem das praktische Arbeiten wird nochmals lobend erwähnt, so von Beatrice (20), die sich wirklich in ein Problem vertiefen kann: „Sehr gut fand ich, dass wir selber drauf kommen müssen und ausprobieren können." oder GGG (21): „Mit der Darstellung von Bildern oder wenn man etwas jemandem erklärt oder bastelt, nimmt man viel mehr vom Lernstoff auf." und Gabriel (8): „Am lehrreichsten für mich war, dass wir auch praktisch arbeiten konnten." Auch die Beweisvielfalt will nochmals erwähnt sein. FFF (19) betont: „Am lehrreichsten fand ich die Lektionen mit den Beweispräsentationen." Fast ebenso tönt es bei AAA (2), bei Simon (12) und bei Fabian (17). Besonders erwähnenswert für Beatrice (20) ist nebst der Quadratschnecke noch der „Stoff von den Scherungen (Fünfeck → Quadrat). Sehr hilfreich!" Offenbar hat sie in diesen Bereichen eindrücklich Neues erfahren. Die Lerntempi sind sehr unterschiedlich, was bewirkt, dass einzelne Schülerinnen und Schüler zwischendurch den Faden verlieren. Mit genügend Eigeninitiative und Eigenverantwortung sowie etwas intensiverem Einsatz zuhause ist es aber auch für schwächere Schüler möglich, voll dabei zu sein.

Die Dreistundenblöcke am Donnerstagvormittag sind für einige Schüler ein Problem, oder werden vielleicht manchmal auch als einfache Problemursache vorangestellt. Letztes Jahr, als ich sie erstmals durchführte, erhielt ich von den Klassen, fast durchwegs positive Reaktionen auf die Dreistundenblöcke.

Es tut gut zu hören, dass es Schüler gibt wie Patrice (5), die realisieren, dass hinter einem derartigen Lehrstück ein grosser Vorbereitungsaufwand steckt: „Ich finde es gut, dass du dir so viel Mühe gibst, uns diese Unterrichtseinheit so interessant wie möglich zu gestalten, wie z.B. mit dem Anhänger."

Zusammenfassung

Im Feedback zeigt sich bei den 21 Schülerinnen und Schülern eine vorwiegend positive Beurteilung des Lehrstücks. Auch wenn die erste Phase als zu lang erlebt wurde, bleibt das Experimentieren, das selber Herausfinden als wichtiger Prozessschritt betrachtet. Der Auftritt des Pythagorasanhängers wirkt auf verschiedene Schüler eher als Auflockerung, bei einigen wird damit aber doch zusätzliches Interesse geweckt. Die Beweisvielfalt und ihre Bearbeitung werden als ein zentral wichtiger Bestandteil des Lehrstücks wahrgenommen. Mit Euklid sind neue Dimensionen angesprochen, die sehr unterschiedlich tiefe Spuren hinterlassen. Die Übungsphase mit Aufgaben ist etwas Gewohntes und verlangt wieder viel Eigentätigkeit. Im Finale wird vor allem das sonst nicht Übliche geschätzt: Ein Überblick über das Ganze mit der Verdichtung in einem Schlussbild. *Dies müssen wir uns merken für andere Lehrstücke!*

Wie hat das Lehrstück auf einzelne Schülerinnen und Schüler gewirkt?
Monique (1) ist eine willige und einsatzfreudige Person, die aber trotz Einsatz und guter Ideen immer wieder sehr Mühe hat zu folgen. Sie findet die Idee des Einstiegs gut und hat auch nach zwei Stunden die Hoffnung nicht aufgegeben: „…in der dritten wird's sicher klappen!“ Für historische und philosophische Bezüge ist sie offen und kann in diesen Bereichen öfters profitieren. Deshalb hat sie gerne dem pythagoräischen Anhänger zugehört und die Vertiefungen und Querblicke beim Euklid geschätzt, „…denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten.“ Dreimal hören wir das Wort „Spass“, wenn es darum geht, selbständig etwas zu studieren, frei zu arbeiten, sich weiterzuhelfen. Das Zuhören und Mitdenken mag sie weniger, weil sie lange braucht, bis sie etwas verstanden hat. Trotzdem findet sie: „Diese Lernphase war sehr gut!!“

Roman (15) hat das 9. Schuljahr bereits einmal in der Sekundarschule absolviert. Er ist zielorientierter Realist, rasch mit sich selbst zufrieden und eher träge. Schon in der ersten Runde ist er „einfach im Kreis gesessen“ und hat auf den Erfolg gewartet. Wer sich nicht auf den Prozess einlässt, muss enttäuscht sein: „Nach den 3 Lektionen wussten wir erst, wie wir zwei Quadrate vereinen können.“ Der Anhänger ist nicht ernst zu nehmen, da es ihn heute nicht geben kann. Die Ansicht der Seelenwanderung hört der Rationalist nicht. Immerhin fand er es „gut, verschiedene Beweise zu sehen. Sie waren leicht verständlich.“ Trotzdem waren konstruktive Beiträge von seiner Seite sehr selten. Über Euklid und den Aufbau der Mathematik äussert er sich nicht. Die Aufgaben betrachtete er distanziert, aus der Warte der Repetition, obwohl ich öfters bemerkte, dass er vieles nur vage verstand. Seine Bemerkungen sind so oberflächlich und unpräzise wie seine Haltung im Unterricht. Er ist ein Extrembeispiel von Schülern, die sich kaum auf Prozesse einlassen, vorgeben das ginge sie nichts an, sie bräuchten das nie oder wüssten fast alles.

Simon (12) ist ein aufgeweckter, humorvoller Junge mit viel Potential, der sich leider von seinen Kollegen allzu oft in der Aktivität zurück binden lässt. Er findet es „gut, das Problem selbst zu lösen.“ Allerdings fehlt ihm in diesem Umfeld die nötige Ausdauer. Immerhin wünscht er nicht die fertige Lösung des Problems, sondern „vielleicht könntest du uns ein bisschen mehr auf die richtige Spur verhelfen.“ Je nach Gruppenzusammensetzung wäre dies wohl auch gerechtfertigt gewesen. Den Auftritt zum Pythagoras sieht er unter dem Aspekt der Abwechslung, aber auch als lebendige Darstellung, die über das blosse Erzählen hinausgeht. Die Gruppenarbeit findet er gut. Vielleicht spricht er auch die Veränderung der Gruppenzusammenstellung durch die zufällige Zuteilung der Beweisblätter an. Seine Bemerkung zur Beweisvielfalt ist interessant: „War gut, jetzt konnte man sicher gehen, dass dieser Satz immer stimmt.“ Nach wie vielen Beweisen war wohl bei Simon genügend Sicherheit gegeben? Ob es andern Schülern auch so ging mit dieser Gewissheit? Gilt auch in dem Bereich: Einmal ist keinmal? …

1.6 Didaktische Interpretation

a) Methodentrias

Exemplarisch
„*Exemplarisch* ist der Lehrgang, wenn ein erstaunliches und möglichst alltägliches Phänomen die Fragequelle ist und bleibt und wenn die Antworten in die Weite der Welt und in die Tiefe der Philosophie führen (Physik ohne Metaphysik bliebe oberflächlich).“ (Berg/Schulze 1998, S. 356)

Der Satz des Pythagoras nimmt im Gefüge der Mathematik eine beziehungsreiche Schlüsselstellung ein. Die Menschheit erlebte an diesem Beispiel erstmals das klare Aufleuchten der Beweisidee, ja der Beweisnotwendigkeit. (Pythagoras feiert und opfert.) Das Beweisen als grundlegendes Prinzip wurde samt dem zuunterst liegenden Unbeweisbaren, Hinzunehmenden, Selbstverständlichen von Euklid in seinen „Elementen“ vervollkommnet und bildet bis heute den Aufbau der Geometrie, ja der ganzen Mathematik als Wissenschaft. Mit diesem Lehrstück verfolgen wir exemplarisch zwei miteinander verknüpfte Funktionsziele (Wagenschein 1980, S. 262f):
1. „Erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein.“
Wagenschein (ebd. S. 263) schreibt dazu: „Das ‚Funktionsziel’: zu erfahren, was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein, wird *ganz* erst klar, wenn wir nicht nur den ‚Pythagoras’, wenn wir die Mathematik selbst verlassen und vergleichen: Nirgendwo anders nämlich gibt es das berauschende Mass von Gewissheit, das uns in der Mathematik erreichbar ist. Denn hier sind wir alle uns schliesslich einig, weil wir alle dieselben Axiome anerkennen und dieselben Schlussweisen, die uns von dort zu den – anfangs – undurchsichtigen und deshalb erstaunlichen komplexen Wahrheiten geleiten. *Hier gibt es keinen Streit.*“ Und nirgends ausserhalb der Mathematik gibt es dieses hohe Mass an Gewissheit, auch wenn es angestrebt wird wie in der Physik zurück bis zum Urknall, in der Evolutionslehre, im Rechtswesen . . .
2. Die „Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“. (ebd. S. 262)
Dass die Griechen nicht nur eingesehen haben, dass die mathematischen Sätze aufeinander ruhen, sondern dies noch in letzter Konsequenz zwischen 500 und 300 v. Chr. durchdacht und durch Euklid dargestellt haben, ist eine nicht hoch genug einschätzbare Leistung, die den Beginn wissenschaftlicher Tätigkeit markiert. Wagenschein schreibt (ebd. S. 262): „Diese Einsicht betrifft das Ganze der Mathematik. Wer sie am ‚Pythagoras’ begriffen hat, der hat etwas begriffen, was mehr ist als der ‚Pythagoras’. Und zwar nicht noch so etwas wie er ist, sondern etwas Übergeordnetes. Das Ganze, ohne dass es inhaltlich durchlaufen zu werden braucht, ‚spiegelt sich’ also in diesem Einzelnen.“

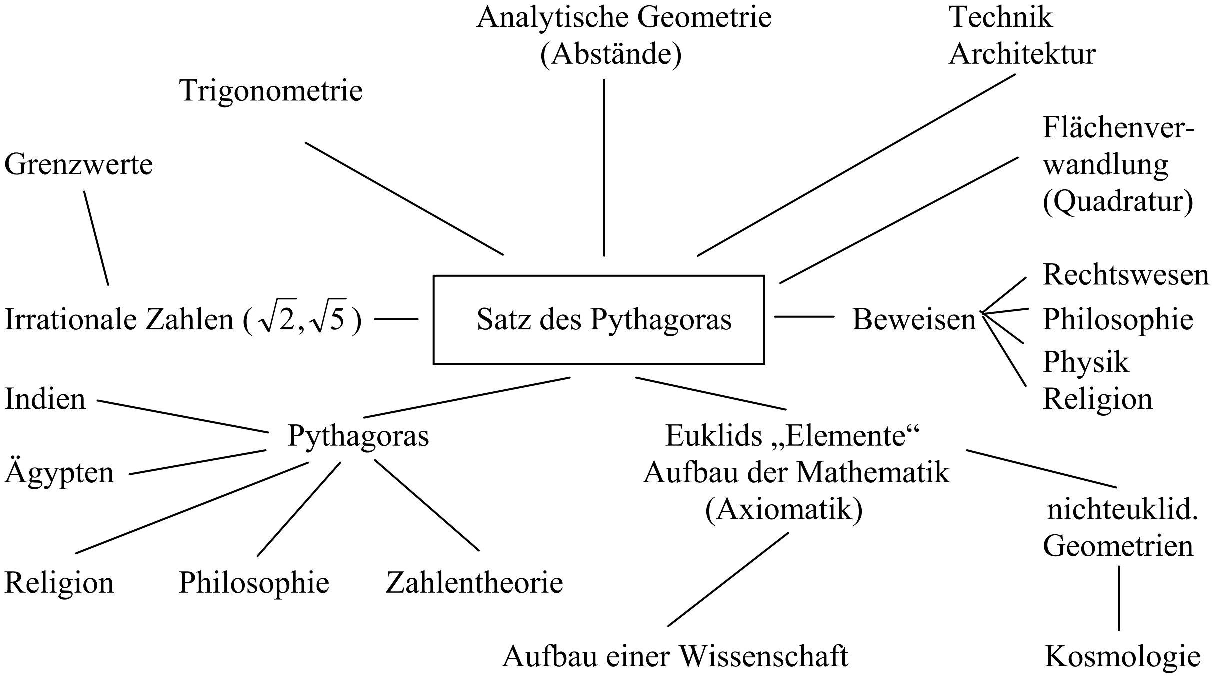
„Euklid oder Sokrates?: Beide! Aber die Möglichkeit einer axiomatischen Darstellung will zuerst sokratisch entdeckt sein.“ (Wagenschein 1982, S. 106) Mit dem Einstieg „Quadrate vereinen“ tauchen wir mitten in eine komplexe Herausforderung. Kindheitserinnerungen kommen hoch an Puzzles und an Stunden des Papier Schneidens und Klebens. Und wie damals: Die Lösung ist nicht offensichtlich, es braucht Zeit, Geduld, Probieren und Verwerfen, Erfolg und Scheitern, Kooperation mit andern… Die Problemstellung ist einfach zu verstehen und doch komplex im Lösungsweg. Wir erfahren, dass grundsätzliche Strategien, wie teilweises Lösen des Problems (Reduktion der Anzahl Quadrate), Bewältigung eines Spezialfalls (zwei gleich grosse Quadrate vereinen) uns dem Ziel näher bringen. Und wenn wir die letzte Klippe, das Vereinen von verschieden grossen Quadraten schaffen, dann gelingt uns die Lösung des Problems. Mit etwas Kletterhilfe ist diese Route begehbar, lässt sich dieser lange Gang zum

Thema durchschreiten. Dabei haben wir einen der zentralsten Sätze der Elementarmathematik entdeckt!
Zur Verdeutlichung und Vertiefung braucht es das Hin und Her, das Vereinen und Entzweien. So werden wir vertrauter mit dem eben Gefundenen. Die Vertrautheit reicht aber nicht; wir brauchen Verständnis und Gewissheit. Entsteht da wirklich ein einziges Quadrat? Das Begründen, das Beweisen beginnt. Und nur mit dem genaueren Hinterfragen erfahren wir Gewissheit, erkennen wir, warum es so sein muss! Wir erleben eine Rollenumkehr: Sind es sonst die fünf bis achtjährigen, welche die Erwachsenen dauernd mit der Frage „Warum?" bedrängen, ist es jetzt der Lehrer, der den sechzehnjährigen Schülerinnen und Schülern fast penetrant Fragen stellt: „Warum sind diese Dreiecke kongruent?" – „Warum liegt ein rechter Winkel vor?" – „Ist dies wirklich ein Quadrat?"… Das Ringen um Gewissheit gehört zur Mathematik und findet ihre Vollendung im Beweis. Hier gehen wir aufs Ganze. Wir wollen wissen und einsehen, *warum* diese besondere Beziehung beim rechtwinkligen Dreieck, und zwar bei *jedem*, so sein muss!

Nach dem Prinzip „Einmal ist keinmal", wenden wir uns dem Beweisen zu, üben und vertiefen diese mathematische Begründungsform und lernen gleichzeitig an ein und demselben Gegenstand eine Vielfalt unterschiedlicher Beweise kennen. So erfahren wir nicht nur die Beweisführung als Methode der Mathematik, sondern lernen bei Euklids Beweis das Strukturprinzip der Mathematik kennen, das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten auf dem Fundament der Definitionen und Axiome, wie es in brillanter Art von Euklid in den „Elementen" vor rund 2300 Jahren dargelegt wurde. Hier erscheint dieser Dreiecksatz als krönender Abschluss seines ersten Buches. Nur dieser streng logische Aufbau auf einem sicheren Fundament garantiert dieses hohe Mass an Sicherheit, welches in andern Wissenschaften wie Physik, Biologie, Recht, Philosophie… angestrebt, aber nicht erreichbar ist.

Ihre besondere Bedeutung erhält die Euklidische Geometrie erst, wenn wir erfahren, dass auch andere, nichteuklidische Geometrien möglich sind, wie z. B. die Kugelgeometrie, in der wir keine Parallelen kennen. Die Verlässlichkeit der Geometrie gilt also nur insofern, als wir ihre Axiome akzeptieren.

Thematische Landkarte:



Thematische Landkarten zum Satz des Pythagoras, welche die Bezüge zu anderen Bereichen darstellen, finden wir bei Wagenschein (1980, S.260) und bei Nölle (1997, S. 76). Schwergewichtig habe ich für obige Darstellung diejenigen Bezüge herausgegriffen, die in meinem Lehrstück direkt oder indirekt angesprochen sind.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Lehrstück „Quadrate vereinen – Quadrate entzweien" zwei grundlegende Funktionsziele der Mathematik bearbeitet, verschiedenste methodische Verfahren beinhaltet und exemplarisch ist für wissenschaftliches Vorgehen und Denken per se.

Genetisch

Das Lehrstück beginnt mit einer kulturauthentischen Fragestellung, der Vereinigung von Quadraten. Diese Frage wurde lange vor unserer Zeitrechnung von den Babyloniern und den Indern gestellt und gelöst. Wir finden sie in Form der Quadratverdoppelung bei Platon im Menondialog von Sokrates. Zentral verbunden ist der Satz mit Pythagoras und seiner Lehre, auch wenn wir nicht wissen, welchen Beweis Pythagoras gefunden haben soll. Aber das Bedürfnis, ja die Notwendigkeit eines Beweises wurde zu jener Zeit drängend. So ist es denn nahe liegend, sich mit dem Namensgeber dieses zentralen Satzes auseinanderzusetzen. Dieser soll ja bei den Ägyptern und ihren Seilspannern, bei den Babyloniern und vielleicht sogar bei den Indern gelernt haben.

Über Pythagoras und diesen ersten Beweis gelangen wir zu Euklid, der in seinen „Elementen" das Beweisen perfektioniert und als zentralen Bestandteil eines grösseren Ganzen, der mathematischen Wissenschaft, hinstellt. Das Ringen um die Fundamente, insbesondere um das Parallelenpostulat, dieser Geometrie führte erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts, also mehr als zweitausend Jahre nach Euklid, zur Erkenntnis, dass auch andere, „nichteuklidische" Geometrien denkbar sind und wirft ein neues Licht auf die Geometrie von Euklid.

Individualgenetisch knüpfen wir mit unserem Ausgangsproblem an bei Kindheitserfahrungen, Kinderfragen und Rätseln. Neben dem Denken sind auch die Augen und die Hände angesprochen. Es findet eine direkte Begegnung mit der jahrtausende alten Frage statt. Etwas Uferhilfe lässt den Erkenntnisdurchbruch erfahren und führt zur Lösung des Problems. Wir haben es geschafft! Anhand von einigen der gegen 400 Beweise üben wir unsere Denkfähigkeit und streifen verschiedene Persönlichkeiten, die sich ebenfalls mit dem Satz auseinandergesetzt haben.

Gegen Schluss rücken wir das Quadraturproblem in einen grösseren Zusammenhang. Wir sind jetzt in der Lage, jedes Vieleck, ja sogar beliebige Vielecke zusammen in ein einziges Quadrat zu verwandeln. Aber die Quadratur des Kreises: Diese geht nicht! Umso erstaunlicher ist es, dass sich die Möndchen des Hippokrates quadrieren lassen. Was doch die Mathematik für Überraschungen bereithält!

So erfahren die Schülerinnen und Schüler im lebendigen Prozess viel darüber, zu was die Griechen vor mehr als 2000 Jahren fähig waren und wie sich damals wissenschaftliches Denken entwickelte, das auch heute noch als vorbildlich gilt.

Dramaturgisch
Dieses Lehrstück umfasst mit seinen ca. 22 Lektionen, inbegriffen 8 Übungslektionen, das gesamte Kapitel der Satzgruppe des Pythagoras samt einer wesentlichen Vertiefung im Bereich des Beweisens und des Aufbaus der euklidischen Geometrie.

Im I. Akt führt uns der steile Einstieg mitten ins zentrale Problem: „Quadrate vereinen“. Auch wenn der einzelne Schüler noch nicht weiss, wohin das führen wird (wer weiss das schon beim wissenschaftlichen Arbeiten?), die Aufgabe ist klar und sie wirkt herausfordernd. Die Quadrate sind die widerspenstigen Hauptdarsteller, denen die ganze Aufmerksamkeit gilt. Im Hin und Her zwischen Plenum und Kleingruppe läuft der für die Schüler ungewohnt lange dauernde Prozess. Er erfordert Geduld und Durchhaltevermögen. Doch wir kommen vorwärts, ein Weg zeichnet sich ab. Wir reduzieren die Anzahl der Quadrate in drei wesentlichen Stufen: Erst ergeben sich grosse Quadrate gemäss den Quadratzahlen, dann vereinigen wir je zwei gleich grosse Quadrate zu einem einzigen und schliesslich gelingt es uns, zwei verschieden grosse Quadrate zu einem einzigen zu vereinen und damit das Problem im Gemeinschaftswerk zur Vollendung zu bringen. Vermehrte Vertrautheit mit dem Gewonnenen ergibt sich im Hin und Her von Vereinen und Entzweien.

Im II. Akt will diese Vereinigung von zwei verschiedenen Quadraten zu einem dritten genauer untersucht, begründet, bewiesen werden. Der Schwerpunkt verlagert sich auf das rechtwinklige Dreieck, um welches sich die drei Quadrate scharen, auf das Beweisen als Methode und damit verknüpft auf ihren „Urheber“ und Namensgeber Pythagoras samt seiner Lehre.

Im III. Akt steht das Beweisen, konzentriert auf diesen einen Satz, im Zentrum der Beweisvielfalt. Hier wird besonders viel Eigentätigkeit der Schüler verlangt, dafür erhellt sich der Satz von den verschiedensten Seiten. Und sehr oft wird derjenige Beweis, mit dem sich die Schüler am intensivsten befasst haben, zu deren Lieblingsbeweis.

Der letzte Beweis führt uns zum IV. Akt und zu Euklid, unserem zweiten Akteur, der 200 Jahre nach Pythagoras das Beweisen perfektionierte. Er sammelte das ganze mathematische Wissen der damaligen Zeit und stellte es systematisch zusammen. Sein Werk wurde Weg weisend und gilt bis heute als vorbildliches wissenschaftliches Gebäude auf klar definiertem Fundament. Vom Höhepunkt des ersten Buches der „Elemente“, dem Satz des Pythagoras, schreiten wir über andere Sätze hinunter bis zum Fundament am Anfang dieses Buches, auf dem er abgestützt ist, und dann wieder hinauf zu diesem Höhepunkt.

Im V. Akt sind endlich vielfältige geometrische und algebraische Anwendungen des behandelten Satzes gefragt. Dafür muss allerdings eine Auseinandersetzung mit den Wurzelgesetzen eingeschoben werden.

Das Finale, abgestützt auf die vielfältigen Übungen, bringt nochmals eine Verdichtung in der Quadraturfrage und einen Ausblick in der Verallgemeinerung des Satzes auf beliebige Dreiecke, bevor wir mit der Wurzelschnecke die Brücke zum Ausgangsproblem herstellen. Dies ist dann auch Anlass zur Reflexion über das Gelernte und über den Prozess.

b) Die Kategorialbildungskonzeption Klafkis

In seinen „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik“ von 1959 hat Wolfgang Klafki eine mehrstufige Bildungstheorie entwickelt. Er unterscheidet drei Ebenen: Historische Bildungstheorien (unterteilt in vier Teilaspekte), Kategorialbildung und Fundamentale, Elementare Kategorialbildung.

Die historischen Bildungstheorien ergeben die Grundlage der Kategorialbildung. Unter der *materialen Bildung* wird das Inhaltliche, Objektive der Bildung zusammengefasst. Es geht also um die konkret gelernten Inhalte, das Objekt an sich ist bildungswürdig. Bei der *formalen Bildung* steht im Zentrum das Subjektive der Bildung mit Blick auf den Sich-Bildenden. Es sind die Kräfte im Menschen, welche anhand bestimmter Inhalte gebildet werden.

Bei der materialen Bildung unterscheidet Klafki die objektivistische und die klassische Bildung.

1.1 Der bildungstheoretische Objektivismus

Bei diesem Aspekt der Bildung geht es um die Aufnahme von Inhalten, von wissenschaftlichen Erkenntnissen, von sittlichen Werten und ästhetischen Gehalten mit dem Ziel „auf der Höhe der Kultur Stehen“ (ebd. S. 28). Der rechte Winkel gehört fundamental zu unserer Kultur. Kein Bauwerk bei uns kommt ohne ihn aus. Beim vorliegenden Lehrstück geht es sicher einmal darum, diesen bekanntesten mathematischen Satz (bzw. die ganze Satzgruppe des Pythagoras) über das rechtwinklige Dreieck kennen zu lernen, sich Anwendungsbereiche im konstruktiven und rechnerischen Bereich zu erschliessen. Das Kennenlernen des Satzes zieht sich durch das ganze Lehrstück hindurch, das vielfältige Anwenden ist primäres Ziel des V. Aktes.

1.2 Die Bildungstheorie des „Klassischen“

Hier geht es um die Erfahrung des Klassischen, des Exemplarischen in der reinen, erhabenen und prägnanten Form und Gestalt. Dargestellt wird im Lehrstück das Prinzip der Vereinigung zweier Quadrate durch das Dreieck in der einprägsamen Pythagorasfigur. Diese Verwandlung in eine einfache Grundform ist eine Grundfrage aus dem klassischen Altertum. Es gelingt uns, eine beliebige Anzahl Vielecke in einem Quadrat zu vereinen. Sogar gewisse krummlinig begrenzte Flächen lassen sich quadrieren, aber für den Kreis geht es nicht! Die Redeweise „Die Quadratur des Kreises“ für ein unlösbares Problem ist Bestandteil unserer Kultur. In der Begegnung mit den „Elementen“ des Euklid erfahren wir am klassischen Beispiel das „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“, den Aufbau einer Wissenschaft, ihre Begründung auf Fundamenten und ihren systematischen Aufbau. Dieser ist geprägt durch eine Reihe von Sätzen, welche nach klassisch gewordenem Schema Voraussetzung – Behauptung – Beweis miteinander verknüpft sind.

Bei der formalen Bildung unterscheidet Klafki zwischen funktionaler und methodischer Bildung.

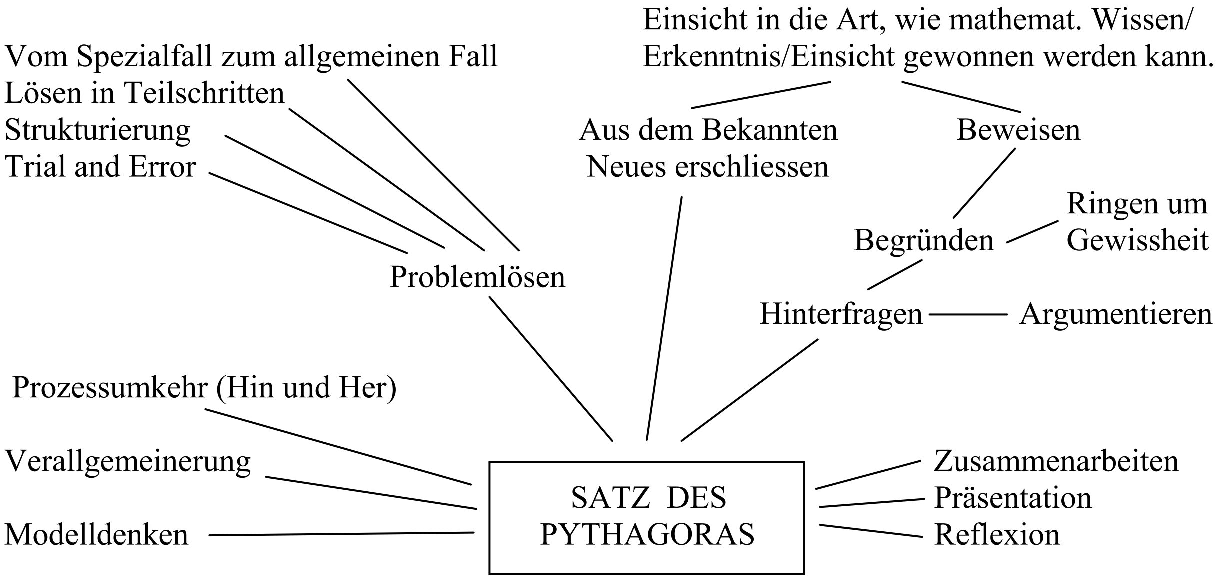
1.3 Die Theorie der funktionalen (Kräfte-)Bildung

Bei der funktionalen Bildung ist das Wesentliche „nicht Aufnahme und Aneignung von *Inhalten*, sondern Formung, Entwicklung, Reifung von körperlichen, seelischen und geistigen *Kräften*.“ (ebd. S. 33) Idealerweise ist eine Übertragung der neu gebildeten Kräfte auf andere Inhalte und Situationen möglich. Im Lehrstück wird die Macht klarer Argumentation in Form von Beweisen erarbeitet und geübt. Es ist zu hoffen, dass diese Fähigkeit des klaren Denkens und Argumentierens auch in anderen Bereichen zur Geltung kommt. Der Schüler erfährt, dass es verschiedene Erklärungsarten gibt für ein und denselben Satz und realisiert, welcher Zugang ihm persönlich am besten entspricht. Es wird erlebt, dass andere Menschen auf andere Methoden besser ansprechen. Nachhaltig ist sicher die Erfahrung, wozu die Griechen vor über 2000 Jahren fähig waren und dass ich einen Text aus jener Zeit verstehen kann.

Stärkend wirkt das Erleben, dass unsere ursprüngliche Aufgabe, die vorerst nicht lösbar schien, nach längerem Suchen und zeitweiligem Verzweifeln in der Gemeinschaft bewältigt wurde. Wie weit sich derartige Erfahrungen auf andere Situationen übertragen lassen, ist schwer zu sagen.

1.4 Die Theorie der methodischen Bildung

Bei der methodischen Bildung geht es um die Gewinnung und Beherrschung von „Denkwiesen, Gefühlskategorien, Wertmassstäben“ oder kurz von Methoden zur Bewältigung späterer Lebenssituationen. Bei Heinz Klippert (1994, S. 27) lesen wir: „In dem Masse, wie sich sein Methodenrepertoire erweitert und festigt, wächst auch seine Selbststeuerungs- und Selbstbestimmungsfähigkeit – und damit seine Mündigkeit.“ – „…ohne Methodenbeherrschung ist Mündigkeit sicherlich nicht wirkungsvoll erreichbar.“ Methodische Bildung findet aber nicht im luftleeren Raum statt, sondern braucht ein interessantes Thema, einen herausfordernden Gegenstand. Da in diesem Lehrstück viele methodische Bereiche gefördert werden, sei hier eine *methodische Landkarte* angefügt:



Natürlich hat das Lehrstück nicht das Ziel, diese Methoden zur Perfektion zu trainieren, aber in all diesen methodischen Bereichen werden Erfahrungen gesammelt und Fortschritte erzielt. Das Mass der Mündigkeit wird erhöht.

2. Kategorialbildung

In der Kategorialbildung nimmt Klafki einen den vier historischen Bildungstheorien übergeordneten Standpunkt ein. Auf dieser höheren Ebene geht es um umfassendere Kategorien, welche zur wechselseitigen Erschliessung von Mensch und Welt gehören.

Die Kategorie, die im Lehrstück gewonnen wird, ist das, was Wagenschein als *Funktionsziel* bezeichnet, nämlich „Diese Einsicht in das Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“ (Wagenschein 1980, S. 262). Diese Einsicht umfasst jetzt aber mehr als nur das zur Kenntnis Nehmen. Es schliesst die Erfahrung ein, wie von einem zentralen, klassischen Satz ausgehend die Begründung, oder eben der Beweis, in die Tiefe führt, zu früheren bewiesenen Sätzen und schliesslich zu gewissen, als gegeben angenommenen Fundamenten. Zu ihr gehört auch die Fähigkeit, einen derartigen Satz beweisen oder allenfalls einen Beweis nachvollziehen zu können, die Methoden zu kennen und womöglich auch zu können. Nur so wird dieses in Jahrtausenden gewachsene und sich ständig weiterentwickelnde Modell des Raumverständnisses im einzelnen Menschen erfahrbar und lebendig. Der Raum erschliesst sich dem Menschen durch seine Fundamente, seine Sätze und seine einleuchtenden Zusammenhänge und der Mensch erschliesst sich den Raum durch seine gewonnen Fähigkeiten und Methoden, Beweise zu führen, Zusammenhänge zu erkennen, Sätze anzuwenden und vielleicht sogar das System weiterzuentwickeln. Wo diese Geometrie nicht mehr ausreicht, wird dem Menschen eine Änderung der Grundlage nahe gelegt, auf der er sich eine andere Geometrie erbaut und sich damit bisher unerreichte Dimensionen des Kosmos erschliesst.

3. Fundamentale und elementare Kategorialbildung
Bei der fundamentalen und elementaren Kategorialbildung stossen wir in eine noch tiefere Schicht des Bildungsgehaltes vor. Sie ist dann gegeben, wenn sie „… den Durchstoss zum Fundamentalen, zu den tragenden Kräften der Grundbereiche unseres geistigen Lebens erlaubt“ (Klafki 1959, S. 45).

An unserem Beispiel sollte dem Jugendlichen klarer werden, wie der hinterfragende, ergründende, mit dem Verstand die Dinge durchdringende Mensch im Kosmos zu einem fundierten logischen System kommen kann, welches aber nicht nur in seinem Geiste existiert, sondern ihm diesen Kosmos weiter erschliesst. Es ist ein Prozess zwischen menschlichem Geist und Kosmos, der selbst nie abgeschlossen ist. Wir haben hier die wissenschaftliche Methode *an sich* exemplarisch vor Augen. Der Mensch sollte schliesslich die Methoden und Fähigkeiten entwickeln, um aktiv in diesen Prozess einzutreten. Nur so wäre Bildung als „doppelseitige Erschliessung“ durch „Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen“ und „Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit“ (Klafki 1959, S. 43) gegeben.

1.7 Das Lehrstück in der Fachschaft

Seit 2002 gehört das Lehrstück zum Pythagoras in dieser Form in mein Repertoire. Am liebsten steige ich bei einer neuen Quarta direkt mit dieser Unterrichtseinheit ein. So sind wir von Beginn weg interaktiv mit der Geometrie verbunden und erleben in kurzer Zeit die Entstehung eines ersten anspruchsvollen Gemeinschaftswerks.

In der Fachschaft habe ich dieses Lehrstück am Mittwoch, 4. Dezember 2002 vier anwesenden Kollegen präsentiert. Der älteste von ihnen hat sich erstaunt gezeigt über die Länge, aber auch über die Vielfältigkeit und den Tiefgang dieses Lehrstücks. Mit meiner Übersicht (S. 19) musste ich darlegen, wo ich die Zeit für dieses Lehrstück nehme.

Der jüngste der Kollegen, Heiner Rohner, hat sich intensiver interessiert, weiteres Material von mir studiert und in seiner Quarta zwei Monate später einen ersten Versuch gewagt. Seine

Unterrichtseinheit dauerte etwa 15 Lektionen. Den Einstieg gestaltete er anders, da er davon ausging, dass der Satz des Pythagoras allen bekannt sei. Er bildete bald sechs gut durchmischte Gruppen, wobei je ein anderer Beweis erarbeitet wurde. Eine Doppellektion stand zur Verfügung, um sich diesen Beweis zu erarbeiten, über den Urheber auf dem Internet zu recherchieren und auf einem Blatt „A4 Quer“ das Wesentliche zusammenstellen. Die Beratungsmöglichkeit wurde von einzelnen Gruppen eifrig genutzt. In der folgenden Einzellektion wurde gemeinsam der Ähnlichkeitsbeweis samt Katheten- und Höhensatz erarbeitet. Die darauf folgende Doppellektion begann Herr Rohner mit dem Sonett von Chamisso (Baptist 1998, S. 32f), worauf die Präsentationen der sechs Beweise folgten, die gemäss seinen vorgegebenen Präsentationszielen mehrheitlich gut dargestellt wurden. Als nächstes stand Euklid mit seinem Beweis im Zentrum, gefolgt von einem längeren Übungsblock. In dieser Zeit wurde auch mit den einzelnen Gruppen deren Präsentation nachbesprochen.

Da ich seinen Unterricht nicht verfolgt habe, kann ich nur auf Grund des vorliegenden Berichtes und seiner Schilderungen einen Kommentar abgeben. Mir fehlt im Einstieg ein spannendes Phänomen, ein Rätsel. Die Verwandlungskraft des rechtwinkligen Dreiecks ist nur im Prozess erfahrbar. Die Beweisvielfalt scheint mehrheitlich zu gefallen. Für die Recherche im Internet samt der verschiedenen Autoren formuliert Herr Rohner klare Aufträge zum Verfassen eines A4-Blattes: „Das Info-Blatt hat den Umfang von zwei A4-Seiten, die auf eine A4-Seite verkleinert werden. Es enthält eine ausformulierte Version des Beweises, zum Verständnis desselben nötige Skizzen sowie Hintergrundinformationen zum Beweis; eine kurze Biographie des Verfassers, ev. Geschichte des Beweises sowie mindestens eine Antwort auf die Frage, was euch an diesem Beweis besonders gefallen (oder missfallen) hat.“ Das an die Schüler verteilte Blatt enthält eine kurze Übersicht über den zu bearbeitenden Beweis und eine hilfreiche Internetadresse. Dank der klaren Auftragserteilung resultieren recht gute Zusammenstellungen. Wir erhalten kurze Informationen über Personen, die sich in den letzten 2500 Jahren mit diesem Satz auseinandergesetzt haben. Als wichtiger erachte ich allerdings die Konzentration auf die zwei wesentlichen Personen, Pythagoras und Euklid, samt deren Grundideen, für die sie stehen.

Eine Kollegin des Literargymnasiums, Bärbel Schöber, hat meine Präsentation am Luzerner Kongress zur Unterrichtsentwicklung (30. 04. – 2. 05. 2003) erlebt und ist inzwischen in die neue Berner Lehrkunstwerkstatt eingestiegen. Demnächst möchte sie in einer ihrer Klassen das Lehrstück zum Pythagoras inszenieren. Deshalb habe ich im Rahmen der 7. Lehrkunstwerkstatt nochmals mein Lehrstück zum Pythagoras der Kleingruppe vorgestellt. Frau Schöber arbeitet mit einem Lehrbuch aus dem Cornelsen Verlag und sucht einen Kompromiss zwischen Lehrstück und Buch. Sie möchte vorerst Architekturprobleme in den Vordergrund stellen und erst später Quadrate vereinen. Die Komposition muss völlig neu überdacht werden. Ob die offene Lernsituation, das Vereinen und Entzweien immer noch die Leistungskraft des Satzes zeigen wird? Finden wir etwas, was die Verwandlungskraft beinhaltet? Soll das rechtwinklige Dreieck im Zentrum bleiben oder gehen wir von Quadraten aus? Wie muss das Lehrstück komponiert sein, wenn es das Unterrichtsbuch ergänzen soll? Dies sind Kompositionsfragen, die es neu zu klären gilt.

Eine Woche später erhalte ich von Frau Schöber eine schriftliche Rückmeldung auf mein Lehrstück:
1. Quadrate vereinen – Quadrate entzweien: Ein spannender und mutiger Einstieg. Probleme: Der Prozess kann stagnieren und das Interesse an der Fragestellung verloren gehen. Der zeitliche Rahmen und Nutzen für alle Schüler ist unklar. Hinweise zur Erfüllung der Hausaufgabe sind notwendig.

2. Der Lehrsatz des Pythagoras: Die Beachtung der historischen und philosophischen Dimension ist sehr sinnvoll. Das Auftreten der Lehrperson als Anhänger des Pythagoras erscheint mir bezüglich der Unterstützung des Lernprozesses als nicht so entscheidend.
3. Beweisvielfalt: Entwicklung der Fähigkeit zum Führen mathematischer Beweise wird sehr gut gestaltet.
4. Die Beweisführung als Prinzip in den „Elementen“ des Euklid: Der Blickwinkel wird gut erweitert.
5. Übung führt zu Vertrauen in die geschaffenen Pfade: Die Übungsblätter erfassen die notwendige Vielfalt und enthalten im Schwierigkeitsgrad abgestufte Aufgaben. Der Bezug zur Lektion 12 könnte mehr beachtet werden (Hebelpresse, Fachwerkbau, Berechnungen in der Archäologie, Trinkhalm …)
6. Das grosse Finale zum Satz des Pythagoras: Es ist sehr eindrücklich, wenn die Mehrheit der Schüler dem inhaltlichen Bogen ständig folgen konnte.
Weitere Bemerkungen und Anregungen: Ich habe das Material mit grossem Interesse und Freude gelesen. Die Gestaltung der Lektionen zur Beweisvielfalt finde ich besonders gelungen.

Kommentar: Frau Schöber setzt Fragen hinter den Einstieg. M. E. genügt es für den Anfang, dass die Lehrkraft vom Sinn und Nutzen dieser drei Lektionen für die Schüler überzeugt ist. Der Auftritt als Anhänger des Pythagoras kann sicher durch entsprechende Informationen ersetzt werden. Im Bereich der Übungen gibt Frau Schöber interessante Anregungen. Ansonsten ist sie dem Lehrstück sehr angetan. Trotzdem will sie einen ganz anderen Weg wählen, weil sie glaubt, das Lehrbuch einbeziehen zu müssen. Warum nicht zu Beginn ein kurzes Lehrstück durchführen, das die wesentlichen Erfahrungen beinhaltet, und anschliessend mit dem Lehrbuch ergänzen?

1.8 Die Ideengeschichte im Lehrstück

Im Zentrum dieses Lehrstücks steht die Grundidee [1] (vgl. Seite 13): Das Begründen, das Beweisen als zentrale Tätigkeit im Denkgebäude der Mathematik. Bevor es allerdings etwas zu beweisen gibt, muss der zu beweisende Satz, bzw. die Hypothese gefunden werden. Was Euklid in seinen Elementen mit fatalen Folgen für die gesamte Mathematik weglässt, versuchen wir im I. Akt zu erleben. Auf heuristischem Weg gelangen wir über die Problemstellung „Quadrate vereinen“ zu einem allgemeinen Verfahren, das sich als Satz formulieren und erst dann beweisen lässt. Bei Archimedes werden wir später noch die Wertschätzung für das heuristische Finden eines Satzes erfahren. Viele Schülerinnen und Schüler stehen diesem Vorgehen positiv gegenüber. AAA (2): „Dass wir es selber herausfinden mussten, war gut, denn so kann man es sich besser einprägen, als wenn der Lehrer es einfach erklärt.“ Beatrice (20): „Wir probierten und das Resultat war dann umso einleuchtender!“ GGG (20): „Man sah an dem Bild wie der Beweis aufgebaut war und so war es einfacher ihn wieder anzuwenden.“ Nach dem gemeinsamen Beweisbeispiel setzen sich die Schüler in der Beweisvielfalt intensiver mit dem Prinzip des Beweisens auseinander. Dabei lernen sie auch verschiedene Argumentationsweisen kennen und erfahren, welche ihnen am besten zusagt. Zudem werden sie erst jetzt empfänglich für das Vorgehen von Euklid. Ausgehend vom Ende des ersten Buches der „Elemente“ lässt sich die Kette zurückverfolgen bis zu den Fundamenten, zu den Definitionen, Axiomen und Postulaten. Damit wird das „Aufeinanderruhen der mathematischen Wahrheiten“ (Wagenschein 1980, S. 262) erfahrbar. Mit Pythagoras und Euklid wird auf die Zeit des Entstehens dieser Grundidee verwiesen, wobei Euklid mit seinen „Elementen“ die Mathematik klar strukturiert und für die Verbreitung zusammenstellt, womit die Mathematik erst zu einer fundierten Wissenschaft mit Vorbildcharakter werden lässt. Der Hinweis auf „nichteuklidische Geometrien" und der Querblick in andere Wissenschaften vertieft erst die Einzigartigkeit mathematischer Denkgebäude und lässt erfahren, „was es in der Mathematik heisst, einer Sache gewiss zu sein" und was Wagenschein meint, wenn er schreibt: „Nirgendwo anders nämlich gibt es das berauschende Mass von Gewissheit, das uns in der Mathematik erreichbar ist. Denn hier sind wir alle uns schliesslich einig, weil wir alle dieselben Axiome anerkennen und dieselben Schlussweisen, die uns von dort zu den – anfangs – undurchsichtigen und deshalb erstaunlichen komplexen Wahrheiten geleiten. Hier gibt es keinen Streit." (ebd. S. 263) – Monique (1) äussert sich so: „Ich finde es gut, etwas von früher zu erfahren. Beispielsweise eben von Euklid. Ich finde auch die Querblicke sehr interessant, denn so kann ich mir Verknüpfungen machen und mir vieles besser behalten."

In diesem Lehrstück sind noch weitere Grundideen angesprochen. Da rechte Winkel in unserer Umgebung allgegenwärtig sind, lässt sich der Satz einfach und ohne komplizierte Modellierung [3] in der Realität anwenden. Auf die Idee der Zahl [4], welche den Alltag durchdringt, verweist der Einbezug von Pythagoras mit seiner Lehre, in der die Zahlen mystische Qualitäten besitzen und ganzzahlige Verhältnisse allüberall postuliert werden, bis hin zu Musik und Astronomie. Formen, Ästhetik und Gesetzmässigkeiten des euklidischen Raumes [6] finden wir nicht nur in der Satzgruppe des Pythagoras, sondern auch beim klassischen Problem der Quadratur, wo sich eine umfangreiche Klasse von Figuren zeigt, die alle konstruktiv in ein Quadrat verwandelt werden können und somit – bei gleicher Fläche – ineinander übergeführt werden können. Das in diesem Zusammenhang geübte Konstruieren ist eine intensive Auseinandersetzung mit dem euklidischen Raum. Die Konstruierbarkeit selbst und das Quadraturproblem verweisen auf die Idee hinter den Gegenständen [2]. Die Grundidee [7], die Formel als Kurzschrift, ist in den Sätzen über das rechtwinklige Dreieck präsent, am einprägsamsten und bekanntesten in $a^2 + b^2 = c^2$. Bei der Ausweitung dieser Gesetzmässigkeit auf beliebige Dreiecke werden neue Zusammenhänge erfahrbar. Die funktionale Abhängigkeit der Quadrate über den Seiten des beliebigen Dreiecks wird aber noch nicht formuliert, sondern erst in den Ungleichungen angedeutet. Ein „geometrischer Algorithmus" [8] taucht in der Wurzelschnecke auf, die uns erlaubt, die Wurzel aus einer beliebigen natürlichen Zahl zu konstruieren. Einem potentiell unendlichen Prozess [9] begegnen wir nicht nur bei der Wurzelschnecke, sondern auch beim Ansinnen, die Quadrate zu pulverisieren und beim Leitbild dieses Lehrstücks, beim Pythagorasbaum.

Im Überblick mag eine Tabelle die Repräsentanz der zentralen Ideen in diesem Lehrstück verdeutlichen:

(geringe [•] bis hohe **[•••]** Repräsentanz)

Grundidee	**[1]**	**[2]**	**[3]**	**[4]**	**[5]**	**[6]**	**[7]**	**[8]**	**[9]**	**[10]**
Repräsentanz	• • •	•	• •	• • •		• •	• • •	•	•	