3. Pythagoras, frei nach Wagenschein u. a.

Dreiecksquadrate.
Der Lehrsatz von Pythagoras
in der Achten
von Annemarie Hensinger

Pythagoras in der Siebten
bei Werner Lenzin,
aus der Sicht von Susanne Wildhirt

Einführung der Herausgeber : Lassen wir es darauf ankommen, einem der Postulate Martin Wagenscheins zu folgen, und versuchen einmal für uns, den bekanntesten Satz der Mathematik, den Satz des Pythagoras, muttersprachlich zu formulieren – statt „a Quadrat plus b Quadrat gleich c Quadrat“ etwa zu sagen:

„Jedes x-beliebige rechtwinklige Dreieck vermag die Flächen der beiden Quadrate, die über den kurzen Seiten des Dreiecks gezeichnet werden, zu einem flächengleichen Quadrat zu vereinigen, das über der längsten Seite des Dreiecks gezeichnet werden kann. Umgekehrt: Der Flächeninhalt des Quadrats über der längsten Seite eines rechtwinkligen Dreiecks entspricht genau dem Flächeninhalt der beiden Quadrate über den kurzen Seiten dieses Dreiecks“, oder zu einem späteren Zeitpunkt des Unterrichts, nach Einführung einiger weniger Fachbegriffe: „Die Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks sind flächengleich des Hypotenusenquadrats.“

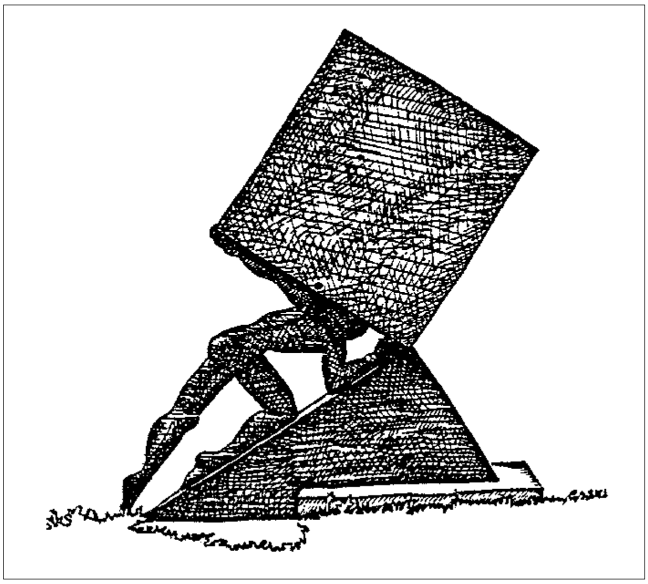
Plötzlich sieht die Welt ganz anders aus. Mein rudimentär vorhandenes Wissen um den mathematischen Grundsatz, der nichts anderes als bewiesen werden wollte, hat sich verwandelt in ein erstaunliches Phänomen: Es gibt solche Dreiecke, „die das können“? Verwandlungskünstler also, die aus Zwei Eins machen und aus Einem Zwei?

Auch mein Blick auf die Sache hat sich verwandelt: Bislang waren doch die a-, b- und c-Quadrate die Hauptfiguren des Unterrichts; nun ist mit einem Mal das Dreieck zum Handlungsträger geworden!

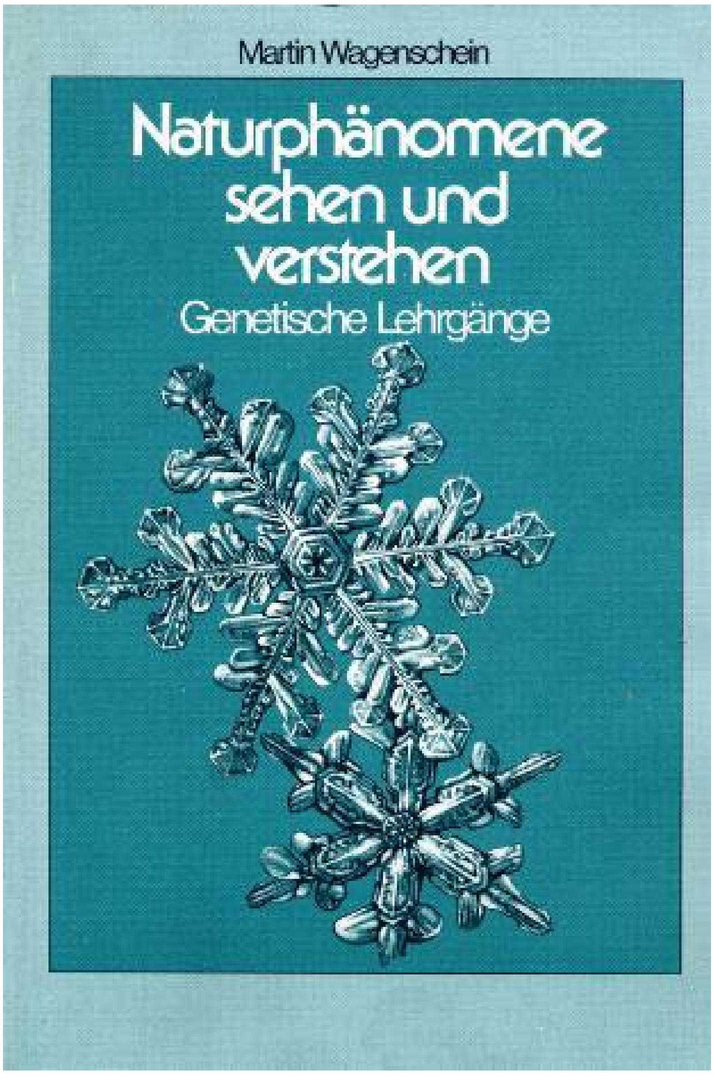
Und dieses Dreieck (bei Annemarie Hensinger wird es die Goldmedaille erringen, siehe ihren Bericht) eröffnet Tür und Tor für Fragen der Schüler: Wenn dieses Dreieck, das wir hier vor uns haben, das schafft, schafft es dann auch ein Dreieck, dessen Seiten ein klein wenig länger oder kürzer sind? Schafft es wirklich nur das rechtwinklige Dreieck? Ist das immer so? Und: Warum ist das so?

Wie groß müssen wir uns etwa die gemeinsame Fläche der beiden seitlich nach oben ragenden Quadrate im Verhältnis zu dem Quadrat denken, auf dem ein gleichseitiges Dreieck ruht? – Doppelt so groß! Verkürzen wir also die Kathetenlänge, indem wir unsere Hände spielerisch – wie Hans Brüngger während seiner Kreuzlinger Präsentation – aneinander vorbei gleiten lassen Richtung Tischplatte: Die

Kathetenquadrate werden immer kleiner, bis sie, wenn beide Arme schließlich auf dem Tisch liegen, gemeinsam nur noch die Hälfte der Fläche des Hypotenusenquadrates einnehmen. Irgendwo hierzwischen, da muss der Winkel liegen, der die Flächengleichheit erzeugt!



Man kann sich vorstellen, wie die Schüler in dieses Phänomen eintauchen, wie sie Quadrate zerschnipseln und wieder zusammensetzen, überlegen, rechnen, nicht nur mit ganzen, sondern auch mit Dezimalzahlen, um herauszufinden, ob's immer stimmt. Sie werden Näherungswerte finden, etwa, wenn $2{,}7^2 + 5{,}5^2 = 6{,}1^2$ berechnet wird, denn 37,54 liegt ja nahe bei 37,21... – Man kann sich vorstellen, wie allmählich in den Köpfen der Schüler zuerst das Zutrauen, dann ein Vertrauen und schließlich die Gewissheit wächst: Ja, ob wir messen, schneiden, rechnen, wiegen..., dieser Satz stimmt und gilt immer und überall! (Es gibt eine hektar-große Anpflanzung dreier verschiedener Baumarten im nördlichen Kanada, die das berühmte Theorem des Pythagoras darstellen, als sichtbares Zeichen für außerirdische Intelligenzen, dass intelligente Wesen die Erde bevölkern; Der Wissenschafts-Rat geht davon aus, „überall" existierende intelligente Wesen könnten diese mathematische Nuss jederzeit „knacken" und dann Kontakt mit den Menschen aufnehmen.)



Dieses Phänomen steckt voller Reize, bis zur tiefsten Erkenntnis lässt es sich ergründen: Mathematische Wahrheiten ruhen aufeinander, zuletzt auf unbeweisbaren Axiomen. Die Beweisführung kann interessanter werden als der Gegenstand des Beweises selbst, in die Tiefe der Mathematik eingetaucht kann sich plötzlich eine Verbindung auftun zum ganzen Menschen, wenn er etwa jubelt: „Ich hab's! Es stimmt wirklich!"

Wenn also Martin Wagenschein 1960 den Satz des Pythagoras als Thema wählt, „so deshalb, weil man an ihm gut alles zeigen kann, was zum ‚exemplarischen' (oder ‚paradigmatischen') Lehren dazugehört (In: Naturphänomene..., S. 251).

In der Thurgauer Werkstatt arbeiteten wir vornehmlich nach dem Lehrstück-Bericht von Beate Nölle: „Dreiecksquadrate. Den Lehrsatz des Pythagoras beweisen" (Lehrkunstwerkstatt I, 1997, S. 37-80).

Nölles Unterricht ist dramaturgisch klar gegliedert: In den ersten fünf Stunden des ersten Aktes lernen die Schüler den Lehrsatz durch die Knotenseile ägyptischer Landvermesser kennen, mit denen nach der Nilschwemme die Felder neu eingeteilt wurden, und durch einen Zauberer, ein Schüler des Pythagoras, der im Handumdrehen aus zwei Quadraten ein einziges, flächengleiches Quadrat basteln konnte. In den acht Stunden des zweiten Akts versuchen sie den Lehrsatz vielfach auf genetisch-sokratische Art zu beweisen, im letzen Akt werden sechs Stunden lang Anwendungen des Lehrsatzes eingeübt.

Besonders faszinierend an Beate Nölles Unterricht ist der zweite Akt, der sich ganz der Frage: „Warum gilt der Satz des Pythagoras?" widmet. Ähnlichkeitsbeweise, Symmetriebeweise, Algebraische Beweise: Wer in der Mathematik früher Professor werden wollte, musste zuerst diesen Lehrsatz neu beweisen. (So sind knapp 400 Beweise allein bei Loomis gesammelt).

Also üben sich auch die Schüler im Beweisen, denn nicht nur auf *den* Beweis, der zweihundert Jahre nach Pythagoras gefunden wurde, allein kommt es an, sondern auf das Beweisen selbst als grundlegende Methode der Mathematik. Nicht einfach auswendig lernen sollen die Schüler den Beweis von Euklid, der den strukturellen Aufbau der Wissenschaften begründet und das am längsten gültige Lehrbuch „Die Elemente" verfasst hat, sondern im genetisch-sokratischen Unterricht mit Hilfe des Lehrers einen eigenen Beweis finden, andere Beweise – auch den von Euklid – kennen lernen, diskutieren, sich überzeugen lassen, einen Lieblingsbeweis auswählen und im Expertengespräch verteidigen können.

Nach dem ersten Pilotjahr und dem Ausscheiden von Werner Lenzin (von dessen Unterricht ein Kurzbericht vorliegt) aus der Werkstatt-Gruppe blieb der „Pythagoras" lange Zeit stecken, es wurde klar, dass für die Volksschule ein geeignetes Modell fehlte.

Hans Brüngger gab in unserer Werkstatt einen Neuanstoß, indem er den Lehrsatz in der Werkstatt präsentierte und für den Pythagoras-Unterricht an der Volksschule eine Aktzentverschiebung gegenüber Nölles Unterricht vorschlug. Er empfahl eine ausführliche Exposition anhand einer griechischen Briefmarke, in der das ganze Theorem des Pythagoras den Schülern als Phänomen vor Augen geführt werden könne und das offen ist für ganz verschiedene Einstiegsüberlegungen, sodann eine Begründung für das „So-Sein" des Phänomens - ein „Aufweis" also, der den Schülern die Sache verdeutlicht, noch ohne sie zu beweisen - , Variationen dazu, Übungs- und Anwendungsaufgaben und einen reflektierenden Abschluss. Seine Idee, ein Klassenquadrat zu basteln, das in seinen Gymnasialklassen den Einstieg bildet, wurde begeistert in unserer Runde aufgegriffen und findet sich in Annemarie Hensingers Inszenierung als ästhetisch gestaltete Hauptaufgabe wieder.

Plötzlich schien der Satz des Pythagoras wieder lehrbar für die Volksschule zu werden: „Alle Flüsse werden überschreitbar, wenn man sich den Quellen nähert" (Xenophon, zitiert in Wagenschein 1960). Ermutigt machte sich Annemarie Hensinger an die Arbeit, und heraus kam ein wunderbarer Unterricht, den sie in diesem Kapitel schildert.

Susanne Wildhirt/Hans Christoph Berg

Dreiecksquadrate – Der Lehrsatz von Pythagoras in der Achten.

von Annemarie Hensinger

Einleitung

„Wir sind gewohnt, diesen Satz in einem gewissen mittleren Stockwerk des mathematischen Schulturmes angesiedelt zu denken und deshalb zu meinen, wer zu ihm hinwolle, müsse notwendig all die Treppen der sogenannten Vorkenntnisse vorher durchsteigen und hinter sich bringen. Ich möchte nun gerne davon überzeugen, dass es Themen gibt, in die man ohne Vorkenntnisse hineinspringen und die man doch aufklären kann; und dies, ohne dass dabei der systematische Aufbau der Mathematik zu kurz käme, im Gegenteil" (Martin Wagenschein).

Und Christian, mein dreizehnjähriger Schüler, schreibt über die ersten zwei Pythagoras-Lektionen folgendes:

„Ein Grieche konnte zu zwei verschieden großen Quadraten ein drittes Quadrat finden, das die gleiche Fläche hat, wie die beiden gegebenen Quadrate zusammen. Zuerst versuchte ich vergeblich, das Quadrat in vier Teile zu zerlegen und es um das größere an den Außenseiten anzubringen. Dann rechnete ich die Fläche von den zwei Quadraten aus und zählte sie zusammen. Aber dann wusste ich nicht mehr weiter. Also nahm ich eine Seite vom großen Quadrat und eine Seite vom kleinen Quadrat und addierte. Es gab 17. Ich zeichnete ein Quadrat von einer Seitenlänge, die 17 cm beträgt, aber es war dann etwa dreimal zu groß. Ich verzweifelte fast. Aber dann kam mir die Idee! Ich legte einfach das kleine auf das große. Meine Theorie war: das kleine ist eins, das große ist zwei, und zusammen bilden sie das dritte Quadrat. Aber das war viel zu einfach und es stimmte nicht. Mir kam noch die Idee, dass ich das kleine Quadrat in Streifen schneide und es um das große lege, aber die Breiten gingen nicht auf. Danach erlöste uns Frau Hensinger von der Qual die Lösung zu finden. Eigentlich ist die Lösung bubieinfach, aber dass man darauf kommt, dazu braucht es Köpfchen!"

Mich selbst hat begeistert, wie mit Beate Nölle und mit Hans Brüngger der Lehrsatz von Pythagoras genetisch erlebt, gelehrt und verstanden werden kann. Mir selbst wurde gelehrt: $a^2 + b^2 = c^2$. Selbstverständlich wurde dies schnell bewiesen, denn nur die Gewissheit zählte, nicht das Denken oder Zweifeln. Und natürlich hab *ich* damit konstruiert und berechnet.

Aber das Erlebnis und das Verständnis, dass das rechtwinklige Dreieck diese Verwandlungskraft hat und dass dies an jeder Tischkante oder Buchecke nachgespielt werden kann, diese Perle des Lehrstücks durfte ich erst jetzt mit Hilfe der Lehrkunst erfahren.

Die Grundfigur für mein Pythagoras-Lehrstück sind die Quadrate und das rechtwinklige Dreieck.

Es ist mein Ziel zu zeigen, dass der Lehrsatz für alle Quadrate jeder Größe gilt: sie können sich zu zweit am rechten Winkel eines Dreiecks treffen und mit dessen Hilfe kann ihre Flächensumme gefunden werden.

Deshalb wähle ich die gleiche Farbe für die Kathetenquadrate um ihre Zusammengehörigkeit zu verdeutlichen. (grün – um die Vielfalt zu betonen!) Ich schneide also eine Menge gleichfarbiger Quadrate mit Seiten von 4 cm bis zu 16 cm und lege sie auf dem großen Pult bereit, damit die SchülerInnen daraus zwei wählen können: die Fülle und die Möglichkeit, diese Fülle dann auch zu überprüfen, soll am Anfang gegeben sein.

Frisch aufgewacht am nächsten Morgen fällt mir ein, dass ich den SchülerInnen keine Unordnung präsentieren will – und so lege ich vor der Stunde 25 Quadratpaare geordnet auf das Pult. Die Auswahl ist nicht mehr beliebig, sondern gesteuert. Die Gesetzmäßigkeit und die Kultur in der Geometrie wird sichtbar.

1. Das rechtwinklige Dreieck – der Handlungsträger

Das Bild, die Schule von Athen, muss helfen, die SchülerInnen 2500 Jahre zurückzuversetzen zu den griechischen Lehrern. Ich versammle die SchülerInnen um das Bild und um die vielen Quadratpaare.

Ich spreche den Satz, langsam und wiederholt, den Christian und alle die MitschülerInnen an den Anfang ihres Berichtes setzen. Dazu halte ich zwei Quadrate in der Hand.

„Ein Grieche konnte zu zwei verschieden großen Quadraten ein drittes Quadrat finden, das den gleichen Flächeninhalt hat wie die gegebenen beiden. Wählt nun zwei Quadrate und versucht, das Quadrat zu finden, das flächengleich den zweien ist.“

Dazu lege ich jetzt die roten A4-Blätter hin. – „Es darf gemessen, auch geschnitten werden, aber achtet darauf, dass ihr die Maße der Originalquadrate deponieren könnt.“

Nun beginnt ein Probieren, ein Drehen und Wenden und Schnipseln. Ein Mädchen, später auch ein Knabe, hat sehr schnell die Quadratflächen berechnet und addiert. Beide kommen nicht weiter. Die Summe durch zwei zu dividieren, das kann’s nicht sein, das stellen beide fest.

Leno schreibt: „Ich habe probiert und probiert, bis ich nicht mehr denken konnte.“

Ermüdet schaut mich Christian an und fragt: „Hend sie lang gha bis sie’s usegfunde hend?“

„Leider durfte ich nicht so lange studieren!“

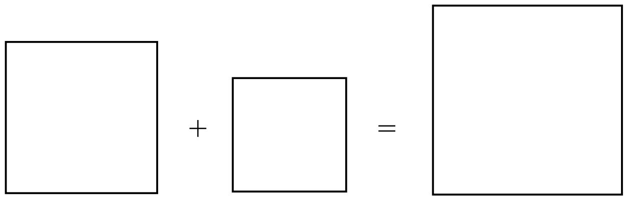
Ich merke, dass wir nach dem halbstündigen Suchen Hilfe brauchen. Auf dem Hellraumprojektor erscheint der Kopf von Pythagoras –

„Das ist der Grieche, der das konnte!“ Und in schöner Schrift schreibe ich seinen Namen und seine Jahreszahl auf die Wandtafel. Niemand kennt ihn, denn in unseren Mathebüchern erscheint er erst im neunten Schuljahr, am hintersten Ende aller Dreieckskonstruktionen und -berechnungen.

Als ich die General-Erlösung vorschlage, hinzugehen und den Pythagoras zu fragen, gibt mir Leno sofort seine beiden Quadrate. Ich gehe hinter der Projektorwand weg ins Nebenzimmer und richte dort das zugehörende Hypotenusenquadrat in rot. Nach einer Minute kann ich an der Wandtafel die Lösung befestigen:

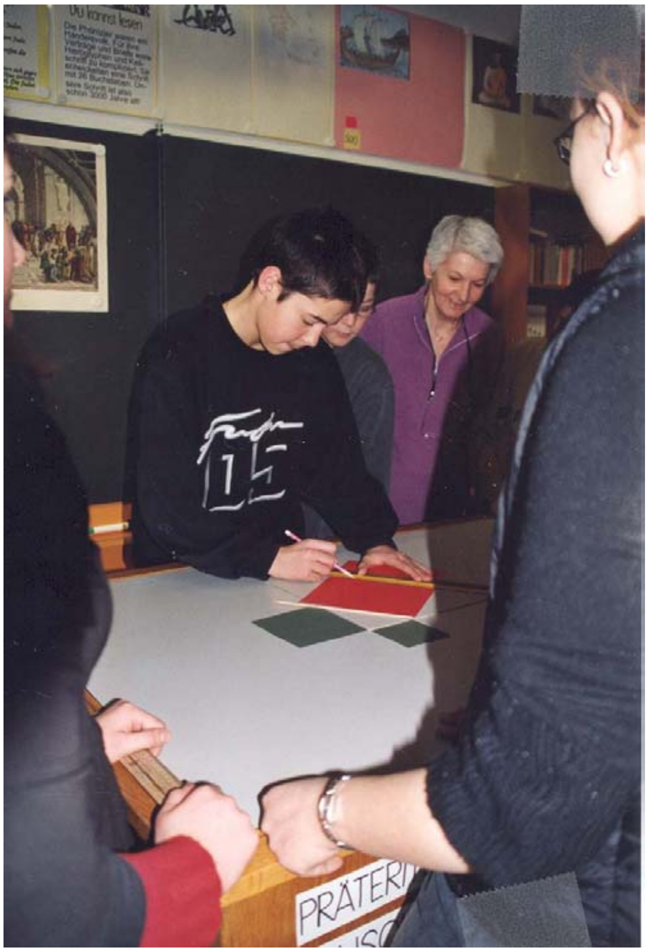
Es ist mäuschenstill, die Augen staunen und die Köpfe denken. Wortlos zeichne ich einen verbindenden Bogen mit dem +Zeichen unter die zwei grünen Quadrate. Merve will sofort rechnen. (Hier muss ich bemerken, dass ich für die Präsentation an der Wandtafel exakter messen und schneiden sollte). Trotzdem kann das Schätzen mit Auf- und Abrunden vorerst genügen, ja, es ergibt sich ein weiterer Lektionsteil, nämlich der der statistischen Erfassung. Jeder SchülerIn wird in einer nächsten Lektion aus der Fülle der vielen Quadrate weitere Pythagorasfiguren legen und berechnen.

Was will denn Merve rechnen? Sie rechnet:



1. Quadrat + 2.Quadrat = Fläche drittes Quadrat. Aber wie kann man denn die Seite des dritten Quadrates finden? (Das Potenzieren und Wurzelziehen ist nur ansatzweise vorhanden – kleine Erinnerungstipps meinerseits führen dazu, dass wir doch die Wurzel aus der Summe ziehen).

„Pythagoras hat aber nicht gerechnet. Er hat die Quadrate an die Außenseiten der Tischecke gehalten und der rechte Winkel ist sein Gehilfe.“



Ich zeige dies den Schülern an allen vier Pultecken – und wie durch Götterhauch ist ihnen die dritte Seite geschenkt worden. Kein SchülerIn drängt vor und zeigt sie. Aufmerksam wird geschaut.

Ich lege einen rechteckigen Karton auf das Pult, an eine Ecke die zwei grünen Quadrate – das rote A4-Blatt lege ich als zukünftige Hypotenuse von Quadratecke zu Quadratecke. Mit zwei Holzstäbchen deute ich seine richtige Größe an, ein Schüler hilft beim Zuschneiden.

Das Staunen ist groß, und die Frage, ob das immer so sei, liegt hörbar im Raum.

„Ja, wenn der rechte Winkel hilft, ist das immer so! Deshalb verdient der rechte Winkel eine Goldmedaille!“ Aus Goldfolie habe ich ein rechteckiges Dreieck in der ungefähr erwarteten Größe vorbereitet. Ich lege es auf die Kartonecke, ordne die drei Quadrate wieder schön an und zeichne den rechten Winkel ein. „Wenn wir die grünen Quadrate durch das rechtwinklige Dreieck hindurch bewegen, werden sie zum flächengleichen roten Quadrat.“ (rot – der Freund)

Nun liegen A-3 formatige blaue Blätter (blau – die Erkenntnis) bereit, auf die die SchülerInnen die Fülle, den Freund und die Erkenntnis als Pythagoras-Figur aufkleben.

Nun schreiben alle nach dem gemeinsamen Anfangssatz ihr persönliches Denken und Ringen um das dritte Quadrat auf.

Der erste Teil, das Hinführen zum Lehrsatz im Sinne des Aufweises, ist geschafft. Nun kann die Durchführung und Reflexion einiger nicht zu mathematischer Beweise folgen.

Aber, da der erste Pythagorasbeweis von Euklid erst 200 Jahre später erfolgte, dürfen wir auch noch 200 Tage zuwarten – bis dann sind wir in Algebra, Geometrie und Rechnen noch erfinderischer geworden! Und bestimmt folgt auch noch ein dritter Teil: die geometrischen Konstruktionen und Anwendungen.

Zu der heutigen, farbigen Illustration erhalten die SchülerInnen noch den Abdruck der griechischen Briefmarke, welche den Lehrsatz im Verhältnis 3:4:5 zeigt. Bestimmt unterstreicht diese Marke die Bedeutung, welche der Satz von Pythagoras in der Welt gewonnen hat.

Zwischenpause

Woher hat das rechtwinklige Dreieck diese Zauberkraft, diese Additionskraft? Ich habe lange über dieser Frage gebrütet – ohne Resultat!

Und ich stellte diese Frage zu Beginn unserer Kleingruppengespräche an Dr. Hans Christoph Berg. Inspiriert wohl von Pythagoras antwortete er mit mir unvergesslich überzeugenden Augen: „Ja, weil es verwandt ist mit dem Quadrat!“ (Auch einer meiner Kollegen sagte dankbar überrascht, daran hätte er noch gar nie gedacht, die Frage noch nie gestellt)

2. Zahlentripel

Zu Beginn der nächsten Lektion zeige ich den Schülern die Briefmarke, welche den Satz des Pythagoras im Verhältnis 3:4:5 zeigt. Dies ist ein ganzzahliges Verhältnis, ein Tripel!

Besir denkt kurz nach und sieht sofort die 9 plus die 16 Quadrate, die an der Hypotenuse 25 Quadrate ergeben.

Ist es wohl mit 4:5:6 oder mit 5:6:7 auch so? Sofort untersuchen die Schülerinnen und Schüler die Zahlen von 1 – 25 und forschen nach a^2 Zahlen, die mit b^2 ein ganzzahliges c^2 ergeben. Besir, Mehmet, Leno und bald manch andere finden die folgenden Tripel:

6:8:10 / 5:12:13 / 9:12:15 / 8:15:17 / 12:16:20 / 7:24:25.

Die Briefmarke ist nun unser Vorbild. Jedes gestaltet einen andern Tripel nach Briefmarken-Vorlage. Ich gebe auch eine dicke baumwollene Schnur, auf der ich 40 Teile markiert habe, in die Klasse. Zu zweit legen sie aus den Tripeln rechtwinklige Dreiecke auf den Boden und gewinnen so eine weitere Vertiefung.

3. Unser Klassenquadrat

Verschiedenfarbige Blätter liegen bereit. Die Schüler dürfen sich selbst eine Farbe auswählen und schneiden ein Quadrat aus mit gewählten Seitenlängen von ca. 8 cm – 16 cm:

Désirée 10 cm, Merve 12 cm, Munira 14 cm, Amira 12 cm, Jenny 10 cm, Elcin 10 cm,
Mehmet 10,5 cm, Özkan 10 cm, Halit 6 cm, Ösgi 11,3 cm, Besir 13 cm, Ricardo 16 cm.

Diese Quadrate liegen nun auf dem großen Pult. Gelingt es uns, aus diesen Quadraten ein Klassenquadrat zu legen?

Amira, Jenny und Elcin beginnen sofort, die 12 Quadrate zu einer großen Quadratfläche anzuordnen. Das geht aber nicht auf, Zwischenräume bilden sich. Ganz kurz kommt die Idee auf, was nicht Platz finde, könnte man ja zerschneiden.

Während dieses Anordnen noch im Gang ist, ruft Mehmet: „Pythagoras! Über die Tischecke!“

Er skizziert an die Wandtafel seine Lösung, die je zwei und zwei vereint:

Alle sind beeindruckt – doch Özkan sagt: „Wir könnten auch alle Quadratflächen zusammen zählen, dann haben wir die Fläche des gesamten Quadrats.“ Sofort beginnen alle zu rechnen und erhalten 1582,94 cm. Jetzt zieht man die Wurzel, das gibt eine Quadratseite von 39,78 cm. Wir einigen uns auf 40 cm und schneiden sofort unser Klassenquadrat! So groß muss es werden!

Unterdessen haben Amira und Elcin aber immer wieder die Quadrate herumgeschoben. Sie wollen es offensichtlich nicht nur bei Mehmets Vorschlag belassen. Sie meinen: wir können vorerst nur zwei Quadrate vereinen und zum entstehenden Hypotenusenquadrat das nächste Namenquadrat beifügen. Sie skizzieren ihre Gedanken an die Wandtafel:

Überraschend schnell sind die Schüler der Meinung, dass sie den Weg von Amira und Elcin gehen wollen, weil die „Zauberecke“ Schritt um Schritt weiter helfe.

Mehmet probiert seinen Vorschlag umzuskizzieren und das rechtwinklige Dreieck einzubauen – aber die Klasse entscheidet sich für „eins ums andere.“

Zu zweit legen die Schüler die Quadrate am gelben A3-Blatt über die Ecke und markieren die Hypotenuse. Zur Sicherheit wird auch $a^2 + b^2$ gerechnet und die Wurzel gezogen.

Fortlaufend wächst die Vereinigung – immer mit dem goldenen rechtwinkligen Dreieck. Nach zwei Lektionen liegt eine halbrunde Darstellung am Boden, deren letztes Quadrat eine Seitenlänge von 39 cm hat. Genaues Arbeiten lohnt sich!!

Die Rückwand unseres Schulzimmers ist eine Steckwand. Jenny und Merve steigen auf die Leiter und beginnen zu stecken. Die Klasse sitzt 40 Minuten lang ganz ruhig. Jedes sieht sein Quadrat ins Ganze hinein wachsen – zwei Meter hoch an der hintern Wand! Das letzte Hypotenusenquadrat – unser Klassenquadrat, berührt den Boden: „Wie ein Ohr!“ „Wie ein halbes Herz!“ „Wir hätten weiter oben beginnen sollen!“ „Wir stecken nochmals um!“ „Wir könnten geordnet, vom größten zum kleinsten Quadrat gehen!“ „Warum rundet die Darstellung am Anfang mehr und dann weniger?“ „Was passiert, wenn das neu einzufügende Quadrat sehr groß oder sehr klein ist?“

Einhellig sind die Schüler der Meinung, dass sie die Darstellung neu stecken wollen, damit das letzte Hypotenusenquadrat, das Klassenquadrat, nicht den Boden berührt.

Dieser Denk- und Planungsprozess, der zu vielen verschiedenen Anordnungen führt, ist für mich sehr überraschend. Die Intensität, mit der die 9.-Klässler an dieser gemeinsamen Darstellung teilnehmen, beeindruckt mich sehr. Ich schlage ihnen vor, zuerst zu zeichnen, wie es denn auch noch sein könnte. Und in Kürze entstehen diese Vorschläge:

In für mich unvorhergesehener Weise haben die Schüler das Zeichnen der Pythagoras-Figur am Klassenquadrat geübt. Ich weiß, dass das „Anhängen der Quadrate“ Mühe bereitet. Dies war in meinem bisherigen Unterricht stets ein spezieller Übungsteil: rechte Winkel, Hypotenuse als längste Seite, Hypotenuse dem rechten Winkel gegenüber… Diesmal gelingt es auf dem sinnvollen Hintergrund des Klassenquadrates.

Die Herbstferien beginnen. Danach haben die Schüler und Schülerinnen nochmals erstaunlich intensiv an einer neuen Form herumgedacht. Und dies ist entstanden:

Nun kann ich die Klasse dem Schulbuch überlassen! Jetzt sind Aufgaben zu lösen!

Pythagoras in der Siebten bei Werner Lenzin

aus der Sicht von Susanne Wildhirt

Marlene Hugentobler war Mathematikschülerin von Werner Lenzin in der Klasse 1 G des OSZ Märstetten, als sie unter Zuhilfenahme einer Handvoll Stichpunkte folgenden schönen Text fein säuberlich in ihr Mathematikheft eintrug:

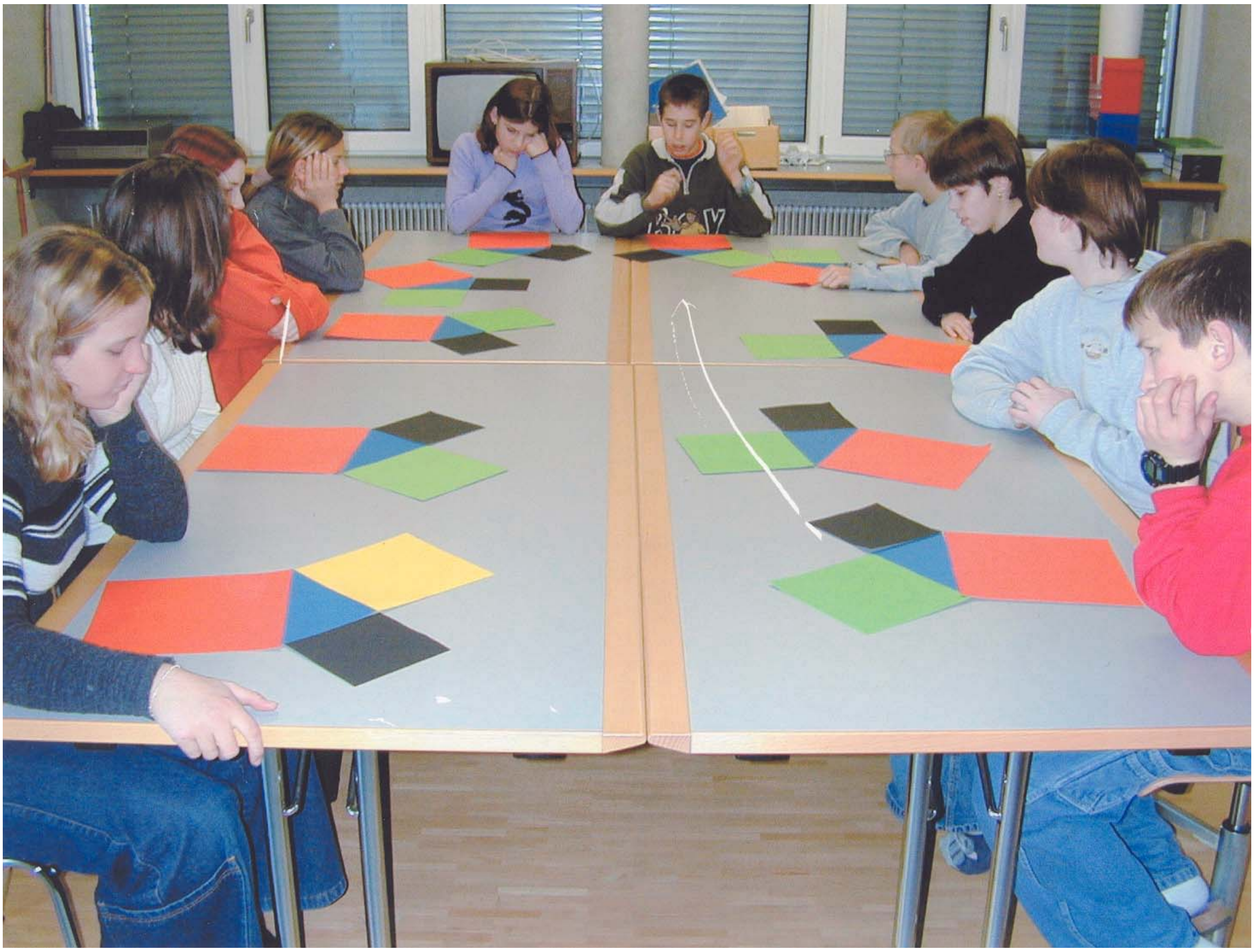
„Pythagoras der Philosoph

Der griechische Philosoph Pythagoras lebte vor 2580 Jahren. Er wurde auf Samos, der östlichsten griechischen Insel, im ägäischen Meer geboren. Pythagoras lehrte die Seelenwanderung und damit auch das für später wesentliche Denken über die Trennung von Seele und Leib, denn er war einer von den gescheitesten Männern der Welt. In Croton (einer italienischen Stadt am Absatz des Stiefels) gründete er eine Bruderschaft. Er hatte strenge Regeln für die Lebensführung und das Studium von Astronomie, Mathematik und Musik. Sein Grundsatz war: Alles ist Zahl und Harmonie. Er war ein sehr kluger Mann. Er erfand: Mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks kann man die beiden Kathetenquadrate zu einem Hypotenusenquadrat zusammenfügen. Seine beste Erfindung war die Formel dafür: $a^2+b^2=c^2$. Der kluge Pythagoras starb um 496 v. Chr.. Er wurde 85 Jahre alt."

Werner Lenzin war leider nur im ersten Pilotjahr Teilnehmer der Kreuzlinger Lehrkunstwerkstatt und konnte in den beiden Folgejahren aus beruflichen Gründen nicht mehr dabei sein. Das Lehrstück über den Satz des Pythagoras unterrichtete er im Winter 2000/2001.

Ich erinnere mich gut, wie wir alle damals gespannt die Luft anhielten, als Werner Lenzin im Rundgang von seinem gewagten Unterrichtseinstieg erzählte, dabei Dias zeigte und Schüleräußerungen vorlas – ein Einstieg, über den Wagenschein übrigens hocherfreut gewesen wäre: Zwei Lektionen lang ließ er seine Schülerinnen und Schüler über drei Quadraten der Kantenlängen 15, 20 und 25 cm knobeln mit der schlichten Aufgabe: „Bringe diese drei Quadrate in eine sinnvolle Ordnung!"

- Ein ausführliches Bad im schönen und schlichten Phänomen!



Die Ästhetik der Aufgabenstellung überzeugte uns: Der Kollege hatte große Quadrate gewählt, die signalisierten: Achtung! Hier geht es um etwas ganz Wichtiges! Bedeutsam auch die Wahl unterschiedlich leuchtender Farben, die die „Individualität" der Quadrate hervorhob.

Den Schülern war durchaus und jederzeit bewusst, im Mathematikunterricht zu sitzen, der seine eigenen Gesetze und Regeln hat, die sie, ohne vorher genau benannt worden zu sein, mit großer Ernsthaftigkeit befolgten. Sie wussten: Mit diesen drei Quadraten erklimmen wir einen besonders hohen Gipfel der Mathematik. Die Beschäftigung mit der Person des Pythagoras ergänzte unaufdringlich und implizit: In diesem Unterricht dürfen wir die Sternstunde eines genialen Mathematikers miterleben, also lasst uns versuchen, das kleine gelbe, mittlere grüne und große rote Quadrat „in Ordnung" zu bringen.

Und was haben die Schüler dabei erlebt?

Oliver: „Ich habe ausprobiert und ausprobiert. Am Ende habe ich eine Lösung erhalten. Man stellt das rote Quadrat senkrecht und die beiden kleineren Quadrate waagrecht darauf.“ Stefan: „Ich habe ca. drei Stunden daran gemacht. Dann hatte ich die Lösung: Zuerst das rote Quadrat und dann das gelbe Quadrat und das grüne Quadrat oben drauf.“

Silvio: „Ich habe es zuerst alleine versucht und dann mit meinem Vater und meiner Mutter zusammen. Aber wir sind auf keine Lösung gekommen. Ich habe jeden Tag probiert, aber es ging nicht. Nicht einmal mein Vater konnte mir helfen; er weiß sonst alles. Ich denke, es könnte eine Lösung geben.“

Dermaßen der Lösung entgegenfiebernd bekamen die Schüler in der zweiten Lektion den Auftrag, aus blauem Papier – der Farbe der Erkenntnis – ein rechtwinkliges Dreieck auszuschneiden, dessen Kathetenlängen dem grünen und gelben Quadrat entsprechen. Verschiedene Zuordnungen der drei Quadrate *und* des rechtwinkligen Dreiecks wurden nun versucht, und nach ungefähr fünf Minuten brachte eine der schwächsten Schülerinnen die Lösung des Problems: Das rechtwinklige Dreieck musste ins Zentrum gerückt werden, die drei Quadrate werden um die Seiten herum angeordnet. Nach und nach machten alle es der Kameradin nach, die „zauberhafte“ Bedeutung des rechtwinkligen Dreiecks zum Vereinigen zweier Quadrate zu einem großen war vorbereitet, der Überprüfungsprozess: „Ist das immer so?“ konnte beginnen.